Лекция

Линейные операторы

1. Определение линейного оператора

Пусть заданы два линейных пространства: R_n, R_m.

Если задан закон, по которому каждому вектору $\vec{x} \in R_n$ ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y} \in R_m$, то говорят, что задан **оператор** (преобразование, отображение) $\tilde{A}(\vec{x})$, действующий из R_n в R_m, и пишут $\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x})$.

Вектор $\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x})$ называется **образом** вектора $\vec{x}$, вектор $\vec{x}$ называется прообразом вектора $\vec{y}$. Если пространства совпадают, то оператор $\tilde{A}(\vec{x})$ отображает пространство R_n в себя.

Оператор $\tilde{O}(\vec{x})$ называется **нулевым,** если переводит все векторы $\vec{x} \in R_n$ в нулевые векторы: $\tilde{O}(\vec{x}) = \vec{O}$.

Оператор $\tilde{E}(\vec{x})$ называется **тождественным**, если переводит любой вектор $\vec{x} \in R_n$ в себя: $\tilde{E}(\vec{x}) = \vec{x}$.

Оператор $\tilde{A}(\vec{x})$ называется **линейным**, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in R_n$ и любого действительного числа λ выполняются равенства:

1) $\tilde{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \tilde{A}(\vec{x}) + \tilde{A}(\vec{y})$ (свойство **аддитивности**);

2) $\tilde{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\tilde{A}(\vec{x})$ (свойство **однородности**).

Пусть в пространстве R_n задан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$. Любой вектор $\vec{x} \in R_n$ можно разложить по этому базису: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$. Тогда $\tilde{A}(\vec{x}) = x_1\tilde{A}(\vec{e}_1) + x_2\tilde{A}(\vec{e}_2) + ... + x_n\tilde{A}(\vec{e}_n)$. Каждый из векторов $\tilde{A}(\vec{e}_i)$ можно разложить по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$:

$$\tilde{A}(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + ... + a_{n1}\vec{e}_n$$
$$\tilde{A}(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + ... + a_{n2}\vec{e}_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tilde{A}(\vec{e}_n) = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + ... + a_{nn}\vec{e}_n$$

Распишем $\tilde{A}(\vec{x})$:

$$\tilde{A}(\vec{x}) = x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + ... + a_{n1}\vec{e}_n) + x_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + ... + a_{n2}\vec{e}_n) + \ldots +$$
$$x_n(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + ... + a_{nn}\vec{e}_n) =$$
$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)\vec{e}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)\vec{e}_2 + \ldots +$$
$$(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n)\vec{e}_n .$$

С другой стороны $\vec{y}=\tilde{A}(\vec{x})=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+...+y_n\vec{e}_n$. Так как разложение по базису единственное, то справедливы равенства:

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n$$
$$y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n\ .$$

Матрица коэффициентов данной системы называется **матрицей оператора** $\tilde{A}(\vec{x})$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$, ранг матрицы называется рангом оператора.

Вывод: каждому линейному оператору $\tilde{A}(\vec{x})$ соответствует матрица в данном базисе и наоборот: каждой матрице n-го порядка соответствует линейный оператор n-мерного пространства.

Введем для векторов $\vec{x},\vec{y}\in R_n$ матрицы-столбцы: $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\...\\x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\...\\y_n\end{pmatrix}$. Тогда систему равенств можно записать в виде матричного уравнения: $Y=AX$.

Пример 1. Найти образ $\vec{y}=\tilde{A}(\vec{x})$ вектора $\vec{x}=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2-2\vec{e}_3$, если оператор $\tilde{A}(\vec{x})$ задан матрицей $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-2&3\\2&1&1\end{pmatrix}$.

Решение: $Y=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-2&3\\2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-14\\5\end{pmatrix}$.

Ответ: $\vec{y}=7\vec{e}_1-14\vec{e}_2+5\vec{e}_3$.

2. Действия над операторами

1) **Суммой операторов** $\tilde{A}(\vec{x})$ **и** $\tilde{B}(\vec{x})$ называется оператор $\tilde{A}+\tilde{B}$, такой, что $(\tilde{A}+\tilde{B})(\vec{x})=\tilde{A}(\vec{x})+\tilde{B}(\vec{x})$.
2) **Произведением оператора** $\tilde{A}(\vec{x})$ **на число** λ называется такой оператор, что $(\lambda\tilde{A})(\vec{x})=\lambda(\tilde{A}(\vec{x}))$.
3) **Произведением операторов** $\tilde{A}(\vec{x})$ **и** $\tilde{B}(\vec{x})$ называется такой оператор, что $(\tilde{A}\tilde{B})(\vec{x})=\tilde{A}(\tilde{B}(\vec{x}))$.

Сами операторы $\tilde{A}+\tilde{B}$, $\lambda\tilde{A}$, $\tilde{A}\tilde{B}$ являются линейными.

3. Матрица оператора в новом базисе

Пусть задано два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ и $\vec{e}_{\mathbf{1}}^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, ..., \vec{e}_n^{\,*}$ в пространстве R_n. В каждом из них имеются матрицы A, A^* оператора $\tilde{A}(\vec{x})$. Найдем связь этих матриц. Известно, что $X = BX^*$ и $Y = BY^*$, где B - матрица перехода из базиса векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ в базис векторов $\vec{e}_{\mathbf{1}}^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, ..., \vec{e}_n^{\,*}$. Из условия $\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x})$ следует, что $Y = AX$. Тогда:

$$AX = ABX^*,$$
$$Y = ABX^*,$$
$$BY^* = ABX^*,$$
$$B^{-1}BY^* = B^{-1}ABX^*,$$
$$Y^* = B^{-1}ABX^*,$$

следовательно $A^* = B^{-1}AB$.

Пример 2. Найти матрицу A^* линейного оператора в базисе $\vec{e}_{\mathbf{1}}^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, ..., \vec{e}_n^{\,*}$, заданного матрицей A в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1^{\,*} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{e}_2^{\,*} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

Решение. Составим матрицу перехода из базиса в базис: $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу для матрицы B: $B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда $A^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{18}{5} & \frac{17}{5} \end{pmatrix}$.