Лекция 8

Уравнение линии на плоскости

1. Определение линии

Пусть на плоскости XOY задана прямоугольная система координат и некоторая линия (кривая) L.

Уравнением линии L на плоскости называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой другой, не лежащей на этой линии:

$$F(x, y) = 0,$$

то есть линия – это множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению.

Уравнение линии можно задать:

1. в прямоугольной системе координат: $y = f(x)$;
2. в параметрической форме: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где t - параметр;
3. в полярной системе координат: $\rho = \rho(\varphi)$.

Линия называется линией n–ого порядка, если она определяется уравнением n–ой степени относительно текущих прямоугольных координат. Линия первого порядка называется прямой.

Углом наклона прямой к оси OX называется наименьший неотрицательный угол α, на который следует повернуть ось OX, чтобы ее положительное направление совпадало с одним из направлений прямой.

2. Уравнение прямой на плоскости

1) **Уравнение прямой с угловым коэффициентом**.

Пусть задана прямая под углом α к оси (рис. 1).

Тангенс угла наклона прямой к оси OX называется угловым коэффициентом прямой

$$k = tg\alpha$$

Рассмотрим треугольник BMN:

$$MN \perp OX, \qquad BN \perp OY, \qquad BN = x, \qquad MN = y - b.$$

Найдем отношение сторон из треугольника BNM:

$$\frac{MN}{BN} = tg\alpha, \ \frac{y-b}{x} = k, \ y - b = kx, \ y = kx + b.$$

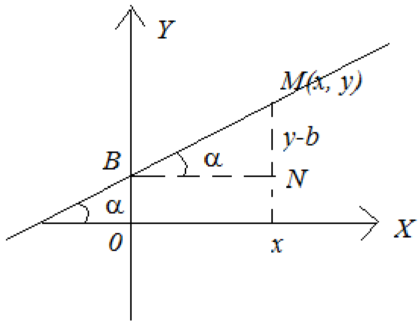

Рис. 1

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$y = kx + b.$$

Если $k = 0,\ y = b$, то прямая параллельна оси OX, если $b = 0,\ y = kx,$, то прямая проходит через начало координат, если $x = a,$ прямая параллельна оси OY .

2) **Уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через точку.**

Пусть задана точка $M(x_1, y_1)$, принадлежащая прямой $y = kx + b$. Подставим координаты точки в уравнение: $y_1 = kx_1 + b$. Выразим свободный член $b = y_1 - kx_1$. Тогда уравнение примет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

3) **Уравнение прямой, проходящее через две точки**.

Пусть заданы две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, принадлежащие прямой L . Следовательно, их координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Выразим коэффициент $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Уравнение прямой будет иметь вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

4) **Уравнение прямой в отрезках**.

Пусть задана прямая, отсекающая на осях OX и OY отрезки a и b. Точки $A(a;0)$ и $B(0;b)$ принадлежат прямой, проходящей через две точки (рис. 2).

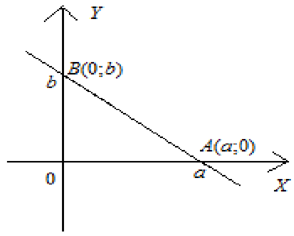

Рис. 2

Подставим координаты точек в уравнение прямой, получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

5) **Общее уравнение прямой**.

В прямоугольной системе координат любая прямая задается уравнением первой степени:

$$Ax+By+C=0,$$

где $A, B, C-$ произвольные числа, причем $A, B-$ одновременно не равны нулю. Угловой коэффициент прямой имеет вид:

$$k=-\frac{A}{B}.$$

Если какого-либо коэффициента в уравнении прямой нет, получаются неполные уравнения прямой:

1) $C=0, \quad Ax+By=0$ - прямая, проходящая через начало координат;

2) $B=0, A\neq 0, C\neq 0, Ax+C=0$ – прямая, параллельная оси OY;

3) $B\neq 0, A=0, C\neq 0, By+C=0$ – прямая, параллельная оси OX;

4) $B=0, A\neq 0, C=0, Ax=0, x=0$ – ось OY;

6) **Каноническое уравнение прямой.**

Рассмотрим уравнение прямой, проходящей через две точки. Введем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, принадлежащий прямой:

$$\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1\}=\{m;n\}.$$

Этот вектор или ему параллельный называют направляющим вектором прямой. Тогда уравнение прямой примет вид:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой.

7) **Параметрическое уравнение прямой**.

Приравняем полученное уравнение прямой к параметру t. Получим пару параметрических уравнений прямой:

$$\begin{cases} x = mt + x_1; \\ y = nt + y_1. \end{cases}$$

8) **Нормальное уравнение прямой**.

Пусть задана некоторая прямая L. Через начало координат проведем перпендикуляр ON к прямой L. Этот перпендикуляр называется нормалью к прямой и обозначается $\vec{N}$ ($\vec{n}$ - единичный вектор нормали) (рис. 3). Пусть нормаль $\vec{N}$ с осью OX образует угол α ($0 \le \alpha \le 2\pi$). Введем параметр p: $ON = p$. Рассмотрим точку $M(x, y) = M(\rho, \varphi) \in L$, совмещая прямоугольную и полярную системы координат ($x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$).

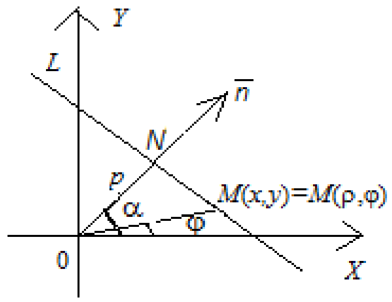

Рис. 3

Из ΔONM получим:

$$p = \rho\cos(\angle NOM) = \rho\cos(\alpha - \varphi) = \rho\cos\alpha\cos\varphi + \rho\sin\alpha\sin\varphi$$

$$p = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

В результате получим нормальное уравнение прямой

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

3. Расстояние между точкой и прямой

Пусть задана прямая L и точка $M_0(x_0, y_0) \notin L$. Зададим прямую в виде нормального уравнения. Проведем через точку $M_0(x_0, y_0)$ прямую L_0, параллельную заданной прямой L. Пусть точки N и N_0 лежат по одну сторону от начала координат (рис. 4).

Векторы ON и ON_0 коллинеарные. Пусть $ON_0 = p_0$. Оценим расстояние между прямыми:

$$d = |p_0 - p| = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|$$

Эта формула позволяет вычислить расстояние от точки до прямой.

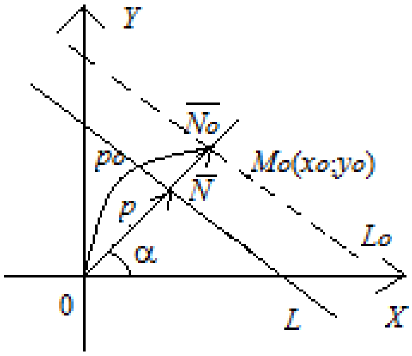

Рис. 4

Если уравнение прямой задано общим уравнением, то его можно перевести в нормальное уравнение прямой, введя нормирующий множитель:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знак множителя определяется так:

а) если $C < 0$, то μ - положительный;

б) если $C > 0$, то μ - отрицательный.

Нормальное уравнение прямой можно записать в виде:

$$\mu(A \cdot x + B \cdot y + C) = 0,$$

а расстояние между точкой и прямой можно вычислить по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример. Найти расстояние от точки $M(4,3)$ до прямой $3x - 4y + 10 = 0$.

Решение:

$$d = \frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2.$$

4. Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть прямые заданы уравнениями в общем виде:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Возможны следующие взаимные положения прямых:

1) **прямые пересекаются**:

а) точкой пересечения прямых является общее решение системы двух уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{cases}$$

при условии, что главный определитель системы не равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

или соблюдается условие $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$;

б) угол φ между прямыми можно найти, если известны угловые коэффициенты прямых:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1};\ k_2 = \frac{A_2}{B_2};\ k_1 = tg\alpha_1,\ k_2 = tg\alpha_2,$$

$$tg\varphi = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right),\ tg\varphi = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1}.$$

Тогда угол можно найти по формуле:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

в) условие перпендикулярных прямых:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad k_1 k_2 = -1;$$

2) **прямые параллельные**:

пусть система уравнений не имеет решения, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

или соблюдается условие $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;

можно условие параллельности записать, используя равенство нулю угла между прямыми:

$$\varphi = 0; \quad k_1 = k_2.$$

3) **прямые совпадают** при соблюдении условия:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Ссылка: 1 пара
https://vk.com/video/@public216917038?q=14.10.2024%20A6&to=L3ZpZGVvL0BwdWJsaWMyMTY5MTcwMzg%2FcT0xMS4xMC4yMDI0JTIw&z=video-216917038_456240437%2Fclub216917038