Лекция 10

Прямая в пространстве

1. Уравнения прямой в пространстве

Линией в пространстве называется множество точек, находящихся одновременно на двух поверхностях, и определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0; \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Система двух уравнений плоскости в пространстве, у которых нормальные вектора $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ неколлинеарные, называется общим уравнением прямой в пространстве (рис. 1):

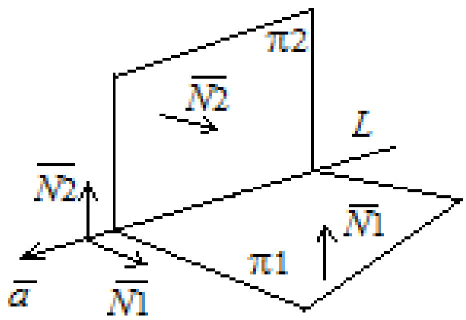

Рис. 1

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases} \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \qquad (1)$$

Вектор, параллельный прямой в пространстве, или принадлежащий самой прямой, называется направляющим вектором прямой:

$$\vec{a} = \{l, m, n\}.$$

Пусть точки $M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$, $M(x, y, z) \in L$ и $\vec{a} \parallel L$. Тогда вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ и $\vec{a} \parallel \overline{M_0}\vec{M}$ следовательно, координаты векторов пропорциональны (рис. 2):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \qquad (2)$$

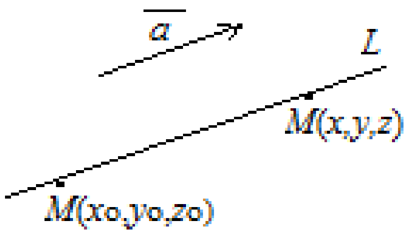

Рис. 2

Уравнение (2) называется каноническими уравнениями прямой в пространстве.

Общее уравнение прямой (1) можно перевести в каноническое уравнение (2). Пусть две плоскости пересекаются по прямой L. Нормальные вектора плоскостей перпендикулярны плоскостям и прямой, следовательно прямая перпендикулярна нормальным векторам одновременно: $\vec{N}_1 \perp L, \vec{N}_2 \perp L.$.

Выберем любой вектор $\vec{a} \in L, \vec{a} \perp \vec{N}_1, \vec{a} \perp \vec{N}_2$ (рис. 18).

Тогда вектор $\vec{a}$ является векторным произведением векторов $\vec{N}_1, \vec{N}_2$:

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \{l, m, n\}.$$

Точку, принадлежащую прямой, можно найти, задав одну из координат произвольно. После подстановки этой координаты в систему уравнений (1) получим систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Пример. Записать общее уравнение прямой $\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0; \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ в канонической форме.

Решение.

1. Найдем нормальные вектора плоскостей

$$\vec{N}_1 = \{3, 2, 4\}, \ \vec{N}_2 = \{2, 1, -3\}.$$

2. Найдем направляющий вектор прямой

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \{-10, 17, -1\}.$$

3. Пусть $z_0 = 0, z_0 \in L.$ Тогда x_0, y_0 найдем из системы:

$$\begin{cases} 3x_0 + 2y_0 - 11 = 0; \\ 2x_0 + y_0 - 1 = 0; \end{cases} \qquad x_0 = 9,\ y_0 = 19.$$

Ответ: каноническое уравнение прямой: $\dfrac{x-9}{-10} = \dfrac{y-19}{17} = \dfrac{z}{-1}$.

Если уравнение (2) приравнять к некоторому параметру $t \in (-\infty; +\infty)$, то получим параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = lt + x_0; \\ y = mt + y_0; \\ z = nt + z_0. \end{cases} \qquad (3)$$

Если заданы две точки прямой $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то уравнение прямой, проходящее через две точки, можно записать так:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (4)$$

2. Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть заданы две прямые в канонической форме L_1, L_2:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \qquad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Для каждой из них запишем направляющий вектор

$$\vec{a}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}, \quad \vec{a}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}.$$

Возможны следующие взаимные расположения прямых:

1) прямые пересекаются под углом φ. Угол φ. между прямыми можно выразить как косинус угла между векторами $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}; \qquad (5)$$

2) прямые перпендикулярные $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 20):

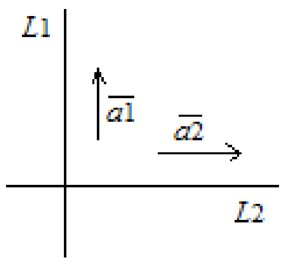

Рис. 2

$$\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2; \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0; \tag{6}$$

3) прямые параллельные $\varphi = 0$ (рис. 3):

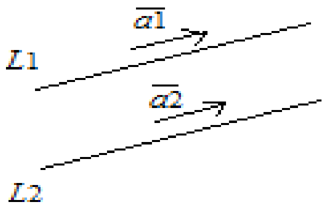

Рис. 3

$$\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2; \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{7}$$

3. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть задана прямая $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ и точка $M(x_1, y_1, z_1)$, ей не принадлежащая (рис. 4).

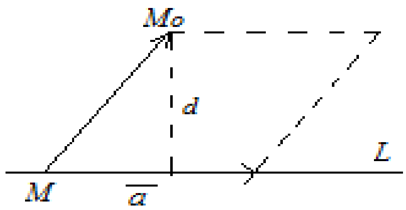

Рис. 4

На прямой выберем произвольную точку $M(x_1, y_1, z_1)$. Рас-смотрим векторы $\vec{a} = \{l, m, n\}$ и $\overrightarrow{MM_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$. Построим на этих векторах параллелограмм. Тогда высота параллелограмма будет определять расстояние от точки до прямой:

$$d = \frac{S}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a} \times MM_0|}{|\vec{a}|}. \tag{8}$$

Пример. Найти расстояние от точки $M(3; -1; 1)$ до прямой:

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 7}{4}.$$

Решение. Найдем направляющий вектор прямой: $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$.

Найдем длину вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{26}.$

За точку, принадлежащую прямой, примем точку $M(2;-1;7)$. Составим вектор $\overrightarrow{MM_0} = \{2-3; -1+1; 7-1\} = \{-1; 0; 6\}.$

Найдем векторное произведение векторов $\vec{a}, \overrightarrow{MM_0}$:

$$\vec{a} \times \overrightarrow{MM_0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6i - 22j - k = \{-6; -22; -1\}.$$

Найдем площадь параллелограмма как модуль векторного произведения:

$$S = \sqrt{6^2 + 22^2 + 1} = \sqrt{521}.$$

По формуле (8) найдем расстояние от точки до прямой:

$$d = \frac{\sqrt{521}}{\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{521}{26}}.$$

Ответ: $d = \dfrac{\sqrt{521}}{\sqrt{26}}$.

Ссылка: https://vk.com/video-216917038_456240554 (начало лекции по прямой в пространстве)

https://vk.com/video-216917038_456240651