Лекция 2

1. Матрицы

1.1 Определение

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Размер матрицы – $m \times n$. Обозначаются матрицы большими латинскими буквами $A, B, A_{m\times n}$. Элементы матриц обозначаются маленькими буквами: a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца.

Например, задана матрица A:

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.2Виды матриц

1) Матрица размером $1\times n$ называется матрицей-строкой.
2) Матрица размером $m\times 1$ называется матрицей-столбцом.
3) Матрица размером $m\times m$ называется квадратной порядка m. Для такой матрицы можно составить определитель, состоящий из элементов матрицы.

Если определитель такой матрицы равен нулю, то матрица называется вырожденной, в противном случае – невырожденной.

Например, для матрицы $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ найти определитель.

Определитель матрицы равен: $\det A_{2\times 2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7$.

4) Матрица, у которой число строк и столбцов не равны, называется прямоугольной.
5) Матрица, элементами которой являются нули, называется нуль-матрицей O.
6) Матрица, элементы которой задаются по формуле

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \alpha_{ij}, & i = j \end{cases}$$, называется диагональной.

7) Диагональная матрица размером $m\times m$, элементы которой

задаются по формуле $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$, называется единичной и

обозначается *E*.

8) Матрицы одного размера $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называются равными, если их соответствующие элементы равны ($a_{ij} = b_{ij}$).

9) Противоположной для матрицы *A* называется матрица тех же размеров $(-A)$, определенная следующим образом: $(-a_{ij}) = -(a_{ij})$.

1.3 Операции над матрицами

1) Сложение матриц.

Суммой матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \qquad (1)$$

Свойства:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$;
3. $A+O=O+A=A$; O - нулевая матрица;
4. $A+(-A)=(-A)+A=O$.

2) Умножение матриц на число.

При умножении матрицы *A* на число α получается матрица $C = \alpha\cdot A$, элементы которой определяются по формуле:

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}. \qquad (2)$$

Свойства:

1. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;
2. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;
3. $-1\cdot A = -A$;
4. $1\cdot A = A$;
5. $O\cdot A = A\cdot O = O$;
6. $\alpha\cdot O = O$.

3) Умножение матриц.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}$, элементы которой определяются по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}\cdot b_{hj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \qquad (3)$$

то есть определяется сумма произведений соответствующих элементов *i* – строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j* – столбца матрицы *B*. Матрицы можно умножать, если внутренние размерности совпадают.

Свойства:

1. $A\cdot B \neq B\cdot A$;

2. $(A\cdot B)C = A(B\cdot C)$;

3. $E\cdot A = A\cdot E = A$;

4. $A^m = \underbrace{A\cdot A\cdots A}_{m}$.

Если выполняется условие $A\cdot B = B\cdot A$, то матрицы A и B называются перестановочными.

Пример. Выполнить действия с матрицами $2A+3B$; $A\cdot B + E$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 8 & -2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 12 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим матрицы на числа:

$$2A=\begin{pmatrix}2 & 10\\ 16 & -4\end{pmatrix},\ 3B=\begin{pmatrix}-12 & 0\\ 36 & 15\end{pmatrix}.$$

Найдем сумму матриц

$$2A+3B=\begin{pmatrix}2-12 & 10+0\\ 16+36 & -4+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 10\\ 52 & 11\end{pmatrix}.$$

Найдем произведение матриц $A\cdot B$:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 8 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 12 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-4)+5\cdot 12 & 1\cdot 0+5\cdot 5\\ 8\cdot(-4)+(-2)\cdot 12 & 8\cdot 0+(-2)\cdot 5\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}56 & 25\\ -56 & -10\end{pmatrix}.$$

Найдем разность матриц

$$AB-E=\begin{pmatrix}56 & 25\\ -56 & -10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}55 & 25\\ -56 & -11\end{pmatrix}.$$

1.4Транспонированная матрица

Матрица A^T называется транспонированной к матрице A, если в матрице A строчки и столбцы поменять местами.

Свойства транспонированных матриц:

1) $\left(A^T\right)^T = A$;

2) $(\alpha\cdot A)^T = \alpha\cdot A^T$;

3) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Пример. Для матрицы $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 7 & 4\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ построить транспонированную матрицу.

Решение: транспонированной является матрица: $A^T_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1.5Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной матрицей для матрицы A, если справедливо следующее условие:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E\ . \tag{11}$$

Необходимые условия существования обратной матрицы:

1) матрица A должна быть квадратной;

2) определитель матрицы A не равен нулю, т.е. матрица A должна быть невырожденной.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. составить определитель матрицы A и вычислить его;
2. если $\det A = 0$, то обратная матрица не существует;
3. если $\det A \neq 0$, составить присоединенную матрицу $A_{пр}$, состоящую из алгебраических дополнений к элементам матрицы A;
4. транспонировать присоединенную матрицу $A_{пр}$;
5. записать обратную матрицу: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^T_{пр}$.

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы A: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найдем определитель матрицы A: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 36.$

Найдем алгебраические дополнения для элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 24; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -18;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 15;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Составим присоединенную матрицу:

$$A_{пр} = \begin{pmatrix} -6 & 24 & -18 \\ 4 & -12 & 15 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу $A_{пр}$:

$$A_{пр}^{T} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 9 \\ 24 & -12 & 0 \\ -18 & 15 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 9 \\ 24 & -12 & 0 \\ -18 & 15 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Для проверки правильности вычислений следует выполнить умножение: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

1.8 Нахождение обратной матрицы методом элементарных преобразований

Элементарные преобразования матриц можно использовать для получения обратных матриц, присоединяя к данной матрице единичную матрицу: $(A|E) \sim (E|A)$.

Например, для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу.

Используем метод элементарных преобразований, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/9 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & -1/6 & 3/8 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & 1/3 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & -1/6 & 3/8 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/12 & -1/6 & -3/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & 1/3 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & -1/6 & 3/8 \end{array}\right).$$

Протокол действий:

1) элементы второй строки умножим на (-1) и поменяем местами с первой строкой;
2) от второй строки отнимем две первых строки (C_2-2C_1);
3) поделим вторую строку на 9 и третью строку на 2;
4) от третьей строки отнимем вторую строку (C_3-C_2);
5) поделим третью строку на 4/3;
6) из второй строки вычтем третью, умноженную на 2/3 (C_2-2/3C_3);
7) к первой строке прибавим три вторых строки и одну третью (C_1+3C_2+C_3).

В результате получили обратную матрицу

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{|ccc} 5/12 & -1/6 & -3/8 \\ 1/6 & 1/3 & -1/4 \\ -1/12 & -1/6 & 3/8 \end{array}\right)=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 10 & -4 & -9 \\ 4 & 8 & -6 \\ -2 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$