Лекция

Общее уравнение линии второго порядка

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$A, 2B, C, 2D, 2E, F$ – числа, причем A, B, C – одновременно не равные нулю. Составим квадратичную форму из коэффициентов уравнения:

$$L(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Пусть $\delta = AC - B^2.$ По знаку δ (малый дискриминант) можно определить вид кривой:

1) если $\delta > 0,$ уравнение относится к эллиптическому виду;
2) если $\delta < 0,$ уравнение относится к гиперболическому виду;
3) если $\delta = 0,$ уравнение относится к параболическому виду.

Справедлива лемма. Пусть в прямоугольной системе координат XOY задано общее уравнение линии второго порядка и пусть $\delta \neq 0.$ Тогда с помощью параллельного переноса и поворота осей координат данное уравнение примет вид:

$$A^* x_2^2 + C^* y_2^2 + F^* = 0,$$

A^*, C^*, F^* – числа, x_2, y_2 – координаты в новой системе координат.

Координаты нового начала координат после параллельного переноса $O_1(x_0; y_0)$ можно вычислить по формулам:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D & B \\ -E & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}; \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A & -D \\ B & -E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}.$$

С учетом параллельного переноса свободный член уравнения вычисляется по формуле:

$$F^* = Dx_0 + Ey_0 + F.$$

Получим новое уравнение:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + F = 0.$$

Угол поворота осей координат можно найти, зная тангенс угла поворота:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}.$$

Можно найти значение тангенса угла поворота из уравнения

$$Btg^2\alpha + (A - C)tg\alpha - B = 0.$$

Зная угол поворота осей координат, оценим коэффициенты уравнения кривой:

$$A^* = C\sin^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + A\cos^2\alpha,$$

$$C^* = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha,$$

$$D^* = D\cos\alpha + E\sin\alpha, \quad E^* = E\cos\alpha - D\sin\alpha.$$

В результате получим коэффициенты канонического уравнения.

Теорема. Пусть в прямоугольной системе координат задано общее уравнение кривой второго порядка. Тогда существует такая прямоугольная система координат, в которой это уравнение примет вид:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 -$ эллипс;

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1 -$ мнимый эллипс;

3) $b^2x^2 + a^2y^2 = 0$ – пара мнимых прямых;

4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 -$ гипербола;

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых;

6) $y^2 = 2px$ – парабола;

7) $y^2 - a^2 = 0$ – пара параллельных прямых;

8) $y^2 + a^2 = 0$ – пара мнимых параллельных прямых;

9) $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.

Пример. Определить вид кривой и построить ее:

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

Решение. Составим квадратичную форму кривой:

$$L(x, y) = 3x^2 + 10xy + 3y^2.$$

Оценим $\delta = AC - B^2 = 3\cdot 3 - 5\cdot 5 = -16.$ Следовательно, эта кривая относится к гиперболическому виду.

Найдем координаты центра кривой по формулам (79):

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}{\delta} = \frac{3-35}{-16} = 2; \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{\delta} = \frac{21-5}{-16} = -1.$$

Определим угол поворота осей координат α :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{10}{3-3} = \frac{10}{0} \quad -$$

не существует, следовательно, удвоенный угол поворота равен 90°. Сам угол поворота равен 45°.

Учтем параллельный перенос осей координат и их поворот, пересчитаем значения коэффициентов:

$$F^* = -1 \cdot 2 - 7(-1) - 13 = -8;$$

$$A^* = 3\sin^2\frac{\pi}{4} + 10\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 3\cos^2\frac{\pi}{4} = 3\cdot\frac{1}{2} + 10\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} = 8;$$

$$C^* = 3\sin^2\frac{\pi}{4} - 10\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 3\cos^2\frac{\pi}{4} = 3\cdot\frac{1}{2} - 10\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} = -2;$$

Уравнение примет вид:

$$8\left(x^*\right)^2 - 2\left(y^*\right)^2 - 8 = 0; \quad 8\left(x^*\right)^2 - 2\left(y^*\right)^2 = 8;$$

$$\frac{\left(x^*\right)^2}{1} - \frac{\left(y^*\right)^2}{4} = 1.$$

Это уравнение гиперболы, смещенной в точку $C(2; -1)$ и повернутой на угол 45° (рис. 1).

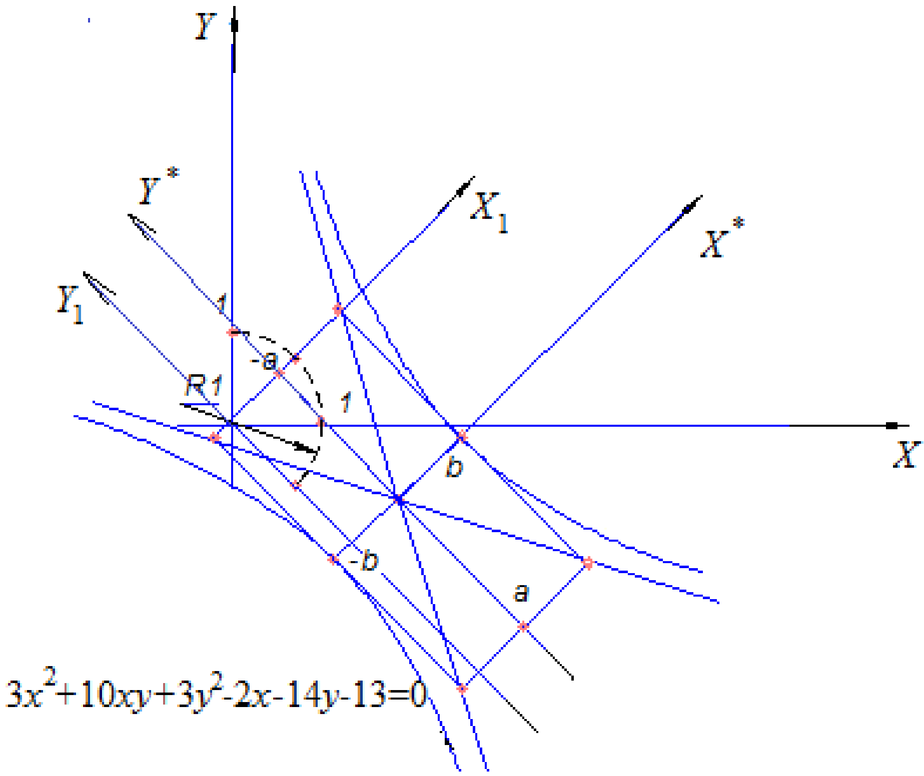

Рис. 1

Пример. Определить вид кривой в зависимости от параметра λ:

$$x^2 - 2y + \lambda(y^2 - 2x) = 0.$$

Решение. Раскроем скобки в уравнении: $x^2 + \lambda y^2 - 2y - 2x\lambda = 0$. Составим $\delta = AC - B^2 = \lambda$ и оценим параметр λ:

1) $\delta = \lambda > 0$, эллипс;
2) $\delta = \lambda < 0$, гипербола;
3) $\delta = \lambda = 0$, парабола.

Получим эти кривые:

1) $(x-\lambda)^2 + \lambda\left(y - \frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{\lambda^3 + 1}{\lambda}$ при $\lambda > 0$;
2) $(x-\lambda)^2 - \lambda\left(y - \frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{\lambda^3 + 1}{\lambda}$ при $\lambda \in (-\infty;\ -1) \cup (-1; 0)$;
3) $x - y = 0$ и $x + y = -2$ при $\lambda = -1$;
4) $x^2 = 2y$ при $\lambda = 0$.