Лекция

Квадратичные формы

1. Определение квадратичной формы

Квадратичной формой $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных называется сумма

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j ,$$

где a_{ij} - действительные числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, ..., n$, называется **матрицей квадратичной формы**. Матрица A является **симметрической**, так как элементы матрицы симметричны относительно главной диагонали. Ранг матрицы A называется **рангом квадратичной формы**.

Пример 1. Составить матрицу квадратичной формы

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 .$$

Решение. Составим ее матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Пусть задана матрица переменных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$. Квадратичная форма в матричной виде запишется так:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T A X .$$

2. Преобразования матрицы квадратичной формы

Пусть заданы две матрицы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$, которые связаны соотношением: $X = BY$, где матрица $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, ..., n$, является невырожденной матрицей перехода от матрицы Y к матрице X. Тогда

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T A X = (BY)^T A(BY) = (Y^T B^T) A(BY) = Y^T (B^T AB) Y = Y^T A^* Y .$$

Вывод: при невырожденном линейном преобразовании $X = BY$ матрица квадратичной формы принимает вид:

$$A^* = B^T AB.$$

3. Канонический вид квадратичной формы

Квадратичная форма называется **канонической**, если все ее коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а матрица A является диагональной:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 .$$

Ранг квадратичной формы равен числу не равных нулю коэффициентов канонической формы. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Любая квадратичная форма с помощью невырожденных линейных преобразованиях переменных может быть переведена в канонический вид.

Такое преобразование не единственное, одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду по-разному. Но при этом различные канонические формы обладают рядом общих свойств: ранг матрицы квадратичной формы не меняется при линейных преобразованиях.

Среди приемов перевода квадратичной формы в каноническую форму можно выделить две:

1) выделение полных квадратов для переменных;
2) использование ортогональных преобразований.

Пусть задана квадратичная форма $L = L(x_1, x_2)$, известна ее матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы. Пусть имеется матрица перехода B от одного ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ в другой $\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}$:

$$\begin{cases} \vec{e}_1^{\,*} = b_{11}\vec{e}_1 + b_{12}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2^{\,*} = b_{21}\vec{e}_1 + b_{22}\vec{e}_2 \end{cases},$$

$\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}$- нормированные собственные векторы, соответствующие собственным числам λ_1, λ_2. Имеем формулы перехода:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_1^* + b_{12}x_2^* \\ x_2 = b_{21}x_1^* + b_{22}x_2^* \end{cases}.$$

Квадратичная форма переходит в каноническую форму:

$$L = L(x_1^*, x_2^*) = \lambda_1 (x_1^*)^2 + \lambda_2 (x_2^*)^2, \ A^* = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

4. Знак квадратичной формы

Квадратичная форма называется **положительно** (**отрицательно**) **определенной,** если при всех переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, выполняется условие: $L(x_1, x_2, ..., x_n) > 0 \quad (L(x_i) < 0)$. Существуют разные методы определения знака квадратичной формы. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1: для того, чтобы форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_i матрицы A были положительные (отрицательные).

Теорема 2 (**критерий Сильвестра**): для того, чтобы квадратичная форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы квадратичной формы были положительны: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$**;** для отрицательно определенной квадратичной формы знаки главных миноров должны чередоваться, начиная с отрицательного значения: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, ...$

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Если квадратичная форма не поддается определению, то ее называют **знаконеопределенной**.

Пример 2. Пусть задана квадратичная форма $L(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2$. Составить ее матрицу и определить знак.

Решение. Матрица квадратичной формы будет такой: $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Оценим главные миноры квадратичной формы:

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 9 = 11.$$

Так как оба минора положительные, то по критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определенная.