

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Белгородский государственный  
технологический университет им. В.Г. Шухова

**В. А. Кузнецов**

## **ОСНОВЫ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ**

**Учебное пособие**



Белгород  
2012

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Белгородский государственный  
технологический университет им. В.Г. Шухова

**В. А. Кузнецов**

## **ОСНОВЫ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ**

*Рекомендовано федеральным государственным бюджетным  
образовательным учреждением высшего профессионального  
образования "Национальный исследовательский университет "МЭИ"  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных  
заведений, обучающихся по направлению подготовки  
140100 – "Теплоэнергетика" специальности  
140105 – "Энергетика теплотехнологий"*

*Регистрационный номер рецензии 1720 от 16.01.2012  
МГУП имени Ивана Федорова*

Белгород  
2012

УДК 532.5(07)+533 (07)

ББК 22.253я7

К 89

Рецензенты:

гл. инженер АО "Белпромпроект" П. Г. М и х а й л о в  
д-р техн. наук, проф. В. Г. Ш а п т а л а (БГТУ им. В.Г. Шухова)

**Кузнецов, В.А.**

К 89 Основы гидрогазодинамики: учебное пособие / В.А.

Кузнецов. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2012. – 108 с.

ISBN 978-5-361-00168-2

В книге представлены основные методы гидрогазодинамики. Приведен вывод дифференциальных уравнений движения идеальной и вязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрены закономерности ламинарного и турбулентного течения в трубах и пограничном слое, теоретические основы движения жидкости в турбулентных струях, процессы истечения газа из сопел. Освещены прикладные вопросы применения уравнений, расчета гидравлических сопротивлений, псевдооживления.

Учебное пособие предназначено для студентов направления "Теплоэнергетика", обучающихся по профилю "Энергетика теплотехнологии" по программам подготовки бакалавров и специалистов.

УДК 532.5(07)+533 (07)

ББК 22.253я7

ISBN 978-5-361-00168-2

© Белгородский государственный  
технологический университет  
(БГТУ) им. В.Г. Шухова, 2012

## ВВЕДЕНИЕ

Гидрогазодинамика изучает движение жидкости и газа под действием различных сил. Как наука, она имеет несколько составных частей. В частности, **гидродинамика** и **аэродинамика**, в отличие от **газодинамики**, рассматривают такие процессы, в которых можно не учитывать влияние сжимаемости газов. **Гидростатика** рассматривает жидкости и газы в состоянии относительного покоя, а **кинематика** – изучает закономерности их движения без учета действующих сил. Так как гидрогазодинамика опирается на общие законы механики, ее часто называют механикой жидкости и газа и считают составной частью более общей науки – механики сплошной среды.

Значение гидрогазодинамики в нашей жизни очень велико. Ее законы и методы применяют при решении многих инженерных задач. Гидрогазодинамику можно назвать базовой теоретической дисциплиной для обширного круга прикладных наук, с помощью которых исследуются процессы в теплоэнергетических и теплотехнологических установках, решаются важные практические задачи, связанные с работой паровых и газовых турбин, транспортом жидкостей и газов по трубопроводам.

Первоначально гидрогазодинамика возникла в виде экспериментальной науки – **гидравлики** в соответствии с запросами развивающегося кораблестроения, строительства систем каналов и водоснабжения городов. Первым научным трудом по гидравлике считают трактат древнегреческого ученого Архимеда "О плавающих телах". В эпоху Возрождения проблемы гидравлики решали Леонардо да Винчи, Галилео Галилей и позднее Блез Паскаль. основополагающие работы принадлежат Исааку Ньютону, который впервые сформулировал закон о внутреннем трении в жидкостях при их движении.

Теоретические основы гидродинамики заложили Леонард Эйлер и Даниил Бернулли, получившие в XVII в. дифференциальные уравнения движения и энергии идеальной жидкости. Хотя длительное время результаты применения теории противоречили опытам с реальными жидкостями, в XIX в. дифференциальные уравнения газодинамики приобрели необходимую точность благодаря работам Анри Навье и Дж. Стокса.

В дальнейшей истории гидрогазодинамики как науки преобладает стремление ученых сблизить и соединить ее теоретическую и экспериментальную составляющие. Комплексно изучались сложные явления турбулентности (О. Рейнольдс) и законы

аэродинамики, ставшей теоретической основой авиации (Н.Е. Жуковский). Началось развитие газодинамики, обеспечившее создание турбостроения, реактивных двигателей, сверхзвуковой авиации.

Сначала, вследствие больших математических трудностей, не удавалось применять дифференциальные уравнения Навье–Стокса к теоретическому исследованию движения реальной жидкости до тех пор, пока в начале XX в. не появились работы Л. Прандтля в области теории пограничного слоя, позволившие обоснованно упростить теоретические методы.

Сегодня гидрогазодинамика является одной из наиболее математически развитых и экспериментально обоснованных наук. Для решения инженерных задач применяется численное интегрирование дифференциальных уравнений движения жидкости при установленной системе граничных и начальных условий. В то же время большая сложность явлений турбулентности вынуждает пользоваться полуэмпирическими теориями, в построении которых большую роль играют эмпирические знания.

Данная книга отличается относительно малым печатным объемом. По своему содержанию она соответствует учебному плану подготовки бакалавров в области теплоэнергетики, что повлияло как на подбор учебного материала, так и на характер его методического изложения. В учебном пособии отдается предпочтение теоретическому подходу к гидродинамическим вопросам как более универсальному применительно к тепловым и массообменным процессам в потоках жидкости и газов. В то же время достаточно широко рассматривается практическое инженерное применение законов и методов гидродинамики. Наиболее сложные газодинамические вопросы излагаются кратко в объеме лишь одной последней главы.

При написании учебного пособия учитывалось, что студенты второго курса не знакомы с тензорными операциями. Поэтому в книге на основе математических аналогий применяются более простые понятия векторного поля. При необходимости углубленного изучения предмета студент сможет найти нужную ему тему в изданных печатных трудах по механике жидкости и газа.

В библиографическом списке указаны только те литературные источники [1 - 5], материал которых непосредственно использован в публикации. Ближайшим к ней по содержанию является издание [4], имеющее заметно больший печатный объем.

## Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

### § 1. Физические параметры жидкости и газа

В гидродинамике *жидкостями* условно называют вещества, находящиеся как в жидком, так и в газообразном состояниях. Несжимаемую жидкость, способную под действием сил поверхностного натяжения образовывать межфазные поверхности раздела, называют *капельной*. Газы считаются *упругими* жидкостями, учитывая, что при скорости много меньшей скорости звука свойство их сжимаемости практически не проявляется. Движение газообразной среды, проявляющей свойство сжимаемости при дозвуковой, звуковой и сверхзвуковой скорости, изучается газодинамикой.

Капельные и упругие жидкости объединяет общее свойство *текучести*, их способность легко изменять форму под действием незначительных сил. Свойство жидкости сопротивляться при этом деформации и взаимному смещению ее частиц называют *вязкостью*.

Термодинамическое состояние жидкости и газа обычно характеризуется двумя параметрами – температурой  $T$  и давлением  $p$ . Термодинамическая температура  $T$  измеряется в кельвинах (К), давление – в паскалях (Па). Величина температуры или давления есть результат совокупного воздействия на измерительный прибор множества движущихся молекул. Давление как термодинамический параметр определяется внутренним состоянием вещества и наиболее полно проявляется при относительном покое жидкости или газа. Поэтому его называют гидростатическим, или просто *статическим* давлением.

*Плотность*  $\rho$ , измеряемая в  $\text{кг/м}^3$ , представляет собой массу вещества, приходящуюся на единицу объема жидкости или газа. Если газовая среда массой  $m$  занимает объем  $V$ , то к ней можно применить уравнение состояния совершенного газа:  $pV = mRT$ , где  $R$  – индивидуальная газовая постоянная. Отсюда следует зависимость плотности от давления и температуры:

$$\rho = p/RT$$

или

$$\rho = \rho_0 \frac{p T_0}{p_0 T}, \quad (1.1)$$

где  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$  – плотность, давление и температура газа при нормальных условиях (то есть при  $p_0 = 760$  мм ртутного столба,  $T_0 = 273,15$  К). Плотность газа  $\rho_0$  при нормальных условиях можно найти, поделив массу одного киломоля на объем  $22,41$  м<sup>3</sup>, занимаемый киломолем совершенного газа.

Плотность каплевой жидкости не зависит от давления и, как правило, несколько уменьшается при ее нагреве в соответствии с индивидуальным коэффициентом температурного расширения. Обычно плотность каплевых жидкостей находят по справочным таблицам в зависимости от температуры.

Одной из основных величин, определяемых в гидрогазодинамике, является вектор скорости  $\mathbf{v}$ , величина которой измеряется в м/с. В отличие от ранее введенных скалярных величин, не имеющих направления, вектор скорости разлагается на три компоненты  $v_x, v_y, v_z$  или  $u, v, w$ , которые в совокупности определяют его направление в пространстве:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k},$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – единичные векторы (орты), направленные соответственно вдоль осей  $x, y, z$  декартовой системы координат.

Размерность **линейной** скорости  $\mathbf{v}$  может быть представлена в виде м<sup>3</sup>/(м<sup>2</sup>с). Таким образом, ее величину можно рассматривать как объем жидкости, прошедшей через единицу поперечного сечения потока за единицу времени. Не менее важной является величина **массовой скорости**  $\rho \mathbf{v}$ , кг/(м<sup>2</sup>с), соответствующая массе жидкости, прошедшей через единицу поперечного сечения потока за единицу времени. Если же рассматривается **массовый расход** жидкости  $G$  через некоторую поверхность  $S$  за единицу времени, то массовую скорость следует умножить на площадь этой поверхности:

$$G = \rho \mathbf{v} S. \quad (1.2)$$

Массовый расход является скалярной величиной, поэтому компонента скорости  $v$  в формуле (1.2) всегда должна быть направлена по нормали к поверхности  $S$ .

С изменением скорости связана величина вектора ускорения  $\mathbf{a}$ , измеряемая в м/с<sup>2</sup>. Математически ускорение движущейся жидкой частицы определяется с помощью полной производной от вектора скорости по времени  $\tau$ , которая в декартовых координатах имеет следующий вид:

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{d\tau} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{d\tau} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{d\tau} \mathbf{k}. \quad (1.3)$$

## § 2. Гипотеза сплошной среды в гидрогазодинамике

Принято считать, что в жидкой или газообразной среде можно выделить очень малые **элементарные** объемы, каждый из которых содержит достаточно большое число молекул, необходимое для проявления физических свойств жидкости. Если физические свойства жидкости известны, то рассматривать движение молекул внутри элементарных объемов нет необходимости. Это позволяет отвлечься от дискретной молекулярной структуры вещества и принять в качестве гипотезы, что элементарные объемы заполнены сплошной деформируемой средой.

Гипотеза сплошной среды дает возможность представить параметры однофазных жидкостей непрерывными зависимостями от времени и координат. Рассматривая при этом элементарные объемы как бесконечно малые, инженеры и ученые успешно применяют математический анализ для теоретического исследования течения жидкости.

Так как жидкость движется в трехмерном пространстве, то для определения положения ее частиц используется трехмерная пространственная система координат – декартова  $(x, y, z)$  или цилиндрическая  $(x, r, \varphi)$ , в которой ось  $x$  направлена по длине цилиндра, ось  $r$  по радиусу, а координата  $\varphi$  представляет собой угол поворота радиуса в поперечном сечении цилиндра. Дополнительной (четвертой) координатой является время  $\tau$ , если физические свойства или параметры жидкости изменяются во времени. Процессы, зависящие от времени, называются **нестационарными** или неустановившимися. Естественно, что параметры **стационарных** или установившихся процессов от времени не зависят.

Существуют два способа математического представления движущейся жидкости в пространственной системе координат. В одном из них жидкость представляется в виде набора бесконечно большого количества движущихся частиц, которые различаются координатами  $x_0, y_0, z_0$  своего положения в начальный момент времени  $\tau_0 = 0$ . С течением времени  $\tau$  координаты положения  $x, y, z$  каждой частицы в пространстве изменяются, что позволяет определять компоненты ее скорости:



$$v_x = dx/d\tau, \quad v_y = dy/d\tau, \quad v_z = dz/d\tau. \quad (1.4)$$

Компоненты ее ускорения также находятся с помощью полных производных от компонент скорости по времени:

$$a_x = dv_x/d\tau, \quad a_y = dv_y/d\tau, \quad a_z = dv_z/d\tau. \quad (1.5)$$

Именно так рассматривается в механике движение твердых тел. Но, несмотря на сравнительно простой вид формул (1.4) и (1.5), такое представление движения жидкости используется редко из-за необходимости следить за движением огромного множества выделенных жидких частиц.

В инженерных приложениях более удобно измерять и вычислять параметры жидкости в определенный момент времени в неподвижных (фиксированных) точках пространства. Так как координаты  $x, y, z$  точек пространства являются независимыми переменными, то изменение параметров жидкости в заданных точках пространства, представляют с помощью частных производных или частных дифференциалов.

Характерно, что через каждую фиксированную точку с координатами  $x, y, z$  в каждый новый момент времени проходит новая частица жидкости. Чтобы в этом случае дать математическое описание параметров каждой движущейся жидкой частицы, например ее температуры  $t$ , полный дифференциал определяемого параметра записывают в виде суммы частных дифференциалов:

$$dt = \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial t}{\partial x} dx + \frac{\partial t}{\partial y} dy + \frac{\partial t}{\partial z} dz.$$

Поделив обе части этого равенства на приращение времени  $d\tau$ , получают выражение, применяемое в математике при дифференцировании сложных функций:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{dz}{d\tau}. \quad (1.6)$$

В этой формуле координаты  $x, y, z$  соответствуют положению жидкой частицы в некоторой фиксированной точке пространства, а производные от координат показывают, как изменится положение частицы в следующий момент времени. В таком случае, согласно (1.4), производные от координат  $x, y, z$  по времени  $\tau$  являются компонентами скорости движущейся час-

тицы, так что выражение (1.6) для полной производной можно записать в следующем виде:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} v_x + \frac{\partial t}{\partial y} v_y + \frac{\partial t}{\partial z} v_z. \quad (1.7)$$

Полную производную, показывающую, как изменяются параметры движущегося элемента жидкости, часто называют **субстанциональной**, так как она связана с переносом важнейших физических величин (или субстанций), таких как масса, количество вещества, количество движения и энергия.

Правая часть субстанциональной производной (1.7) содержит слагаемые двух видов. Частную производную по времени  $\partial t / \partial \tau$  называют **локальной**. Она показывает, как изменяются во времени параметры в выделенной точке пространства, и характеризует нестационарность процесса. Остальные слагаемые называются **конвективными**. Они показывают, как изменяются параметры жидкости вследствие пространственного переноса субстанции движущейся жидкостью.

С помощью субстанциональной производной записывают выражения для компонент ускорения (1.5) жидкой частицы:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{d\tau} = \frac{\partial v_x}{\partial \tau} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z, \\ \frac{dv_y}{d\tau} = \frac{\partial v_y}{\partial \tau} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z, \\ \frac{dv_z}{d\tau} = \frac{\partial v_z}{\partial \tau} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z. \end{cases} \quad (1.8)$$

Следует отметить, что ускорение может отличаться от нуля, даже если скорость в фиксированных точках пространства не изменяется во времени. Например, при установившемся (стационарном) движении локальные производные по времени от компонент скорости равны нулю,

$$\frac{\partial v_x}{\partial \tau} = \frac{\partial v_y}{\partial \tau} = \frac{\partial v_z}{\partial \tau} = 0,$$

в результате чего выражения для компонент ускорения жидкой частицы (1.8) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z, \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z, \\ \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z. \end{cases} \quad (1.9)$$

В этом случае ускорение возникает только вследствие изменения скорости по пространственным координатам.

### § 3. Некоторые понятия математической теории поля

Пусть существует область пространства, в каждой точке которой известно значение некоторой физической величины. Принято считать, что эта величина образует в пространстве математическое поле. Поле может быть скалярным, векторным или тензорным.

**Скалярная** величина, такая, например, как температура  $t$ , давление  $p$  или плотность  $\rho$ , в данной точке в выбранный момент времени однозначно характеризуется своим значением. Можно сказать, что скалярная величина имеет одну компоненту. Скорость является **векторной** величиной. Она характеризуется с помощью трех компонент  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ . Производная от скорости в математическом поле может служить примером **тензорной** величины, имеющей девять компонент:  $\partial v_x / \partial x$ ,  $\partial v_x / \partial y$ ,  $\partial v_x / \partial z$ ,  $\partial v_y / \partial x$ ,  $\partial v_y / \partial y$ ,  $\partial v_y / \partial z$ ,  $\partial v_z / \partial x$ ,  $\partial v_z / \partial y$ ,  $\partial v_z / \partial z$ . Все девять частных производных от компонент скорости вносят свой вклад в вычисление ускорения жидкой частицы по формулам (1.9).

Чтобы упростить запись громоздких тензорных величин, целесообразно пронумеровать оси координат и соответствующие компоненты вектора, обозначив их следующим образом  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$  и  $v_1 \equiv v_x$ ,  $v_2 \equiv v_y$ ,  $v_3 \equiv v_z$ . Тогда все девять компонент тензора ускорений удастся представить одним выражением

$$\partial v_i / \partial x_j,$$

индексы которого  $i$  и  $j$  могут принимать значения 1, 2 или 3.

Математическое поле не только задает значения физических величин, но и позволяет охарактеризовать интенсивность их изменения в трехмерном пространстве. В каждой точке скалярного

поля можно определить вектор, называемый **градиентом** скалярной величины. Градиент скалярной величины всегда направлен в сторону наискорейшего ее возрастания, задаваемую единичным вектором  $\mathbf{n}$ , и равен производной этой величины по направлению  $\mathbf{n}$ . Например, градиент давления  $p$  может быть представлен формулой

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial n} \mathbf{n}.$$

При использовании проекций градиента на оси декартовой системы координат это выражение принимает следующий вид:

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (1.10)$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  – единичные векторы (орты), направленные вдоль осей декартовой системы координат. Градиент скалярного поля является вектором и, следовательно, образует векторное поле.

Интенсивность изменения в трехмерном пространстве векторной величины, например вектора массовой скорости  $\rho \mathbf{v}$ , определяется в каждой точке поля с помощью ее **дивергенции**, которая в декартовой системе координат вычисляется как сумма частных производных от компонент вектора по соответствующим осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}. \quad (1.11)$$

Дивергенция вектора является скаляром и, следовательно, образует скалярное поле.

Чтобы пояснить физический смысл дивергенции, рассмотрим, как изменится величина вектора массовой скорости  $\rho \mathbf{v}$  жидкости, проходящей через малый элемент пространства в форме параллелепипеда объемом  $dV = dx dy dz$  (рис. 1.1). Площади граней параллелепипеда равны следующим величинам:  $dS_x = dy dz$ ,  $dS_y = dx dz$ ,  $dS_z = dx dy$ . Массовый расход жидкости вдоль каждой из осей координат в общем случае не остается постоянным. Он изменится на величину, равную частному дифференциалу по оси, перпендикулярной выбранной грани, помноженному на площадь этой грани:

по оси  $x$ : 
$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx \cdot dS_x = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dV,$$

по оси  $y$ : 
$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dy \cdot dS_y = \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dV,$$

по оси  $z$ : 
$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dz \cdot dS_z = \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dV.$$

Поделив суммарное изменение массового расхода жидкости на объем параллелепипеда  $dV$ , получим правую часть формулы дивергенции (1.11).

Грани малого параллелепипеда образуют замкнутую поверхность  $dS_0$ . Следовательно, дивергенцию вектора массовой скорости  $\text{div}(\rho \mathbf{v})$  можно рассматривать как изменение в данной точке поля массового расхода жидкости при пересечении ею замкнутой поверхности  $dS_0$  (приходящееся на единицу объема):

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{1}{dV} \oint_{dS_0} \rho v_n dS. \quad (1.12)$$

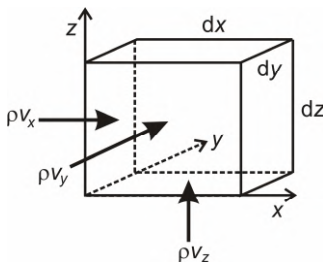


Рис. 1.1. Компоненты массовой скорости на входе в элементарный объем

Выражение для дивергенции вектора в цилиндрической системе координат имеет отличия, учитывающие то, что в этом случае изменяется по радиусу  $r$  не только массовый расход жидкости, но и площадь  $dS_r$  цилиндрических граней элементарного объема (рис. 1.2).

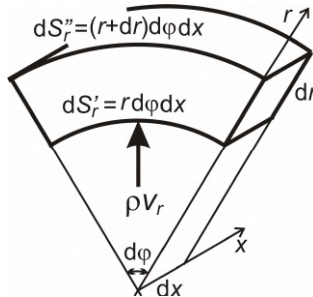


Рис. 1.2. Радиальная массовая скорость  $\rho v_r$  в цилиндрических координатах  $(x, r, \varphi)$ :  
 $dS'_r$  и  $dS''_r$  – площади цилиндрических граней элементарного объема

В результате формула дивергенции массовой скорости в цилиндрических координатах приобретает следующий вид:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(r \rho v_r)}{r \partial r} + \frac{\partial(\rho v_\varphi)}{r \partial \varphi}.$$

Математическая операция дивергенции может применяться также и к тензорным полям, конечно, с учетом их отличия от векторных полей.

#### § 4. Дифференциальное уравнение неразрывности

В гидрогазодинамике большое внимание уделяется дифференциальным уравнениям, позволяющим устанавливать связи между параметрами соседних элементарных объемов жидкости. В их основе лежат фундаментальные законы сохранения массы и количества движения.

Закон сохранения массы применяют к потоку жидкости, не имеющей посторонних включений, например пузырьков пара, или каких-либо других разрывов. Так как масса вещества в гидрогазодинамических процессах не создается и не уничтожается, то изменение расхода жидкости при прохождении ее через малый пространственный объем  $dV$  может происходить только за счет уменьшения или увеличения массы жидкой среды в этом объеме. Это утверждение записывается математически в виде дифференциального уравнения **неразрывности** (или, как иногда говорят, **сплошности**) потока:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.13)$$

Действительно, если дивергенция вектора массовой скорости  $\rho \mathbf{v}$  положительна, то за единицу времени из выделенного малого объема выходит больше жидкости, чем входит в него на величину  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \cdot dV$ . Чтобы выполнялся закон сохранения массы, на такую же величину  $(\partial \rho / \partial \tau) \cdot dV$  должна за единицу времени уменьшиться масса жидкости, находящаяся в выделенном объеме. В таком случае отрицательная производная от плотности по времени  $\partial \rho / \partial \tau$  компенсирует положительную величину дивергенции в уравнении (1.13). И наоборот, отрицательная дивергенция  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$  вектора массовой скорости соответствует накоплению массы жидкости в выделенном малом объеме и должна быть компенсирована положительной величиной производной от плотности по времени  $\partial \rho / \partial \tau$  в этом уравнении.

Подставляя в уравнение (1.13) выражение (1.11) для дивергенции вектора, записывают дифференциальное уравнение неразрывности в частных производных:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.14)$$

Если локальная производная от плотности по времени равна нулю, то дифференциальное уравнение неразрывности принимает следующий вид, пригодный для расчета неизотермических стационарных течений:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.15)$$

Уравнение неразрывности (1.15) имеет относительно простой физический смысл: в стационарных процессах массовый расход жидкости, протекающей через выделенный объем, является постоянной величиной и, следовательно, изменение ее расхода в выделенном объеме равно нулю. Этот закон **постоянства расхода** соблюдается всегда, когда сплошность потока не нарушается.

Дифференциальное уравнение неразрывности содержит три компоненты скорости, которые, как правило, неизвестны. Поэтому оно решается совместно с другими дифференциальными уравнениями.

Более часто в инженерных приложениях встречается уравнение постоянства расхода. Запишем его для элементарной струйки жидкости (рис. 1.3). Боковая поверхность струйки образована **линиями тока**, к которым вектор скорости направлен по касательной. В каждой точке линии тока нормальная составляющая скорости равна нулю, так что боковую поверхность элементарной струйки можно считать непроницаемой для потока жидкости.

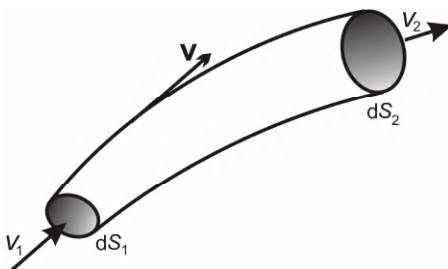


Рис. 1.3. Элементарная струйка жидкости, ограниченная линиями тока:  $v_1$  и  $v_2$  – скорость во входном и выходном сечениях струйки площадью  $dS_1$  и  $dS_2$

Из дифференциального уравнения неразрывности (1.13) и определения дивергенции вектора (1.12) следует, что в стационарных процессах изменение массового расхода жидкости, пересекающей замкнутую поверхность, должно быть равно нулю,

$$\oint_{dS_0} \rho v_n dS = 0.$$

Для элементарной струйки, площади входного и выходного сечений которой обозначены  $dS_1$  и  $dS_2$ , а скорости соответственно  $v_1$  и  $v_2$ , это правило превращается в равенство,

$$\rho_1 v_1 dS_1 = \rho_2 v_2 dS_2,$$

согласно которому массовый расход жидкости на входе в струйку равен массовому расходу на выходе из нее.



Это равенство будет выполняться так же и при течении жидкости по трубопроводу, если рассматривать поток в нем как совокупность элементарных струек. При этом в расчет вводится средняя расходная скорость жидкости  $v_1$  и  $v_2$  в соответствующих поперечных сечениях трубы площадью  $S_1$  и  $S_2$  :

$$G = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \text{const} . \quad (1.16)$$

Равенство (1.16) называют **уравнением постоянства расхода**. Оно утверждает, что в стационарных условиях массовый расход жидкости остается постоянным по длине трубопровода переменного поперечного сечения.

### Вопросы для самопроверки

1. Почему бесконечно малый объем в гидрогазодинамике называют элементарным?
2. Как называются и что показывают разные слагаемые в формуле субстанциональной производной?
3. Может ли ускорение частиц жидкости отличаться от нуля, если локальные значения скорости не изменяются во времени?
4. Какое поле образует градиент давления?
5. Какое физическое содержание имеет дивергенция вектора массовой скорости жидкости?
6. Какой физический смысл содержится в дифференциальном уравнении неразрывности?

## Глава 2. ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

### § 1. Дифференциальные уравнения Эйлера

*Идеальной* называют жидкость, не обладающую вязкостью.

Плотность идеальной жидкости считается постоянной:  $\rho = \text{const}$ .

Перемещение частей или слоев жидкости подчиняется универсальному закону сохранения количества движения (или импульса). Применяя этот закон надо иметь в виду, что обмен количеством движения жидкой частицы с другими частями жидкости или с внешней средой принимает форму силового взаимодействия. Например, для жидкости в элементарном объеме  $dV$  количество движения равно произведению ее массы  $dm$  на вектор скорости  $\mathbf{v}$ , или, с учетом плотности жидкости,  $\mathbf{v}dm = \rho \mathbf{v}dV$ . При изменении скорости и, следовательно, количества движения жидкой частицы возникает сила инерции  $d\mathbf{f}_{\text{ин}}$ :

$$d\mathbf{f}_{\text{ин}} = dm \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} dV. \quad (2.1a)$$

Различают два вида сил – массовые и поверхностные. К **массовым** силам относятся силы дальнего действия, величина которых пропорциональна массе жидкости. Например, сила тяжести  $d\mathbf{f}_{\text{тяж}}$  элементарного объема жидкости определяется как произведение ее массы на ускорение свободного падения  $\mathbf{g}$ :

$$d\mathbf{f}_{\text{тяж}} = -\rho \mathbf{g} dV. \quad (2.1б)$$

К **поверхностным** силам относятся силы давления. Радиус действия поверхностных сил чрезвычайно мал; он соизмерим с межмолекулярными расстояниями. Величина поверхностной силы, приходящаяся на единицу площади, называется **напряжением силы**. Различают **нормальные** и **касательные** напряжения, направленные соответственно по нормали или по касательной к поверхности их приложения. Давление  $p$  является нормальным напряжением, так как оно всегда направлено по нормали (т. е. перпендикулярно) к площадке  $dS$ . Таким образом, сила давления  $d\mathbf{f}_{\text{дав}}$  пропорциональна площади той поверхности, к которой она приложена:

$$d\mathbf{f}_{\text{дав}} = p d\mathbf{S}. \quad (2.1в)$$

Хотя сила давления рассматривается как вектор, статическое давление  $p$  является скаляром. Оно не зависит от ориентации площадки  $dS$  или направления силы давления.

Закон сохранения количества движения (в форме второго закона механики Ньютона) применяют к движущемуся элементарному объему жидкости, записывая с помощью формул (2.1) баланс сил вдоль каждой из координатных осей:

– по оси  $x$ : 
$$\rho \frac{dv_x}{d\tau} dV = - \frac{\partial p}{\partial x} dx(dydz),$$

– по оси  $y$ : 
$$\rho \frac{dv_y}{d\tau} dV = - \frac{\partial p}{\partial y} dy(dxdz),$$

– по оси  $z$ : 
$$\rho \frac{dv_z}{d\tau} dV = - \frac{\partial p}{\partial z} dz(dxdy) - pgdV.$$

Левые части этих равенств можно рассматривать как составляющие силы инерции. Их правые части представляют собой произведения перепада давления в элементарном параллелепипеде (рис. 2.1) на площадь соответствующей грани по формуле (2.1в). Кроме того, в третье равенство введено выражение (2.1б) для силы тяжести, действующей в отрицательном направлении оси  $z$ .

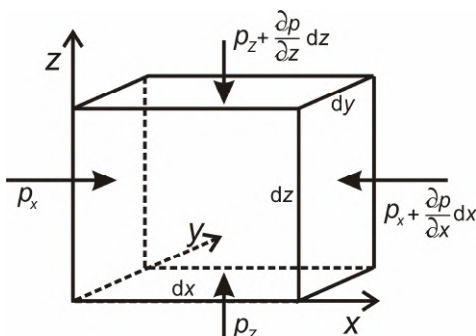


Рис. 2.1. Силы давления, действующие на элемент жидкости вдоль осей  $x$  и  $z$   
(по оси  $y$  силы условно не показаны)

Поделив все эти равенства на объем элементарного параллелепипеда  $dV = dx dy dz$ , получают систему дифференциальных уравнений Эйлера для идеальной жидкости:

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_x}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \frac{dv_y}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho \frac{dv_z}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g. \end{cases} \quad (2.2)$$

По физическому смыслу члены уравнений (2.2) можно рассматривать как массовые или поверхностные силы, действующие на выделенный объем жидкости, но приходящиеся на единицу объема. Они имеют размерность  $\text{Н/м}^3$ .

Следует также обратить внимание на то, что в правую часть уравнений Эйлера входят компоненты градиента давления (1.10), характеризующие интенсивность изменения поля давления. Отрицательный знак перед ними соответствует переносу количества движения в сторону уменьшения давления.

## § 2. Уравнение Бернулли

Дифференциальные уравнения Эйлера находят инженерное применение после их преобразования в уравнение энергии для стационарных течений идеальной жидкости. Нужно учитывать, что силы в уравнениях (2.2) способны совершать работу по перемещению элементарного объема жидкости. Чтобы найти ее величину, первое уравнение (2.2) умножают на перемещение  $dx$ , второе на перемещение  $dy$  и третье на перемещение  $dz$ :

$$\begin{aligned} \rho dv_x \frac{dx}{d\tau} &= -\frac{\partial p}{\partial x} dx, \\ \rho dv_y \frac{dy}{d\tau} &= -\frac{\partial p}{\partial y} dy, \\ \rho dv_z \frac{dz}{d\tau} &= -\frac{\partial p}{\partial z} dz - \rho g dz. \end{aligned}$$

Затем эти уравнения складывают, принимая во внимание, что производные от координат  $x, y, z$  по времени  $\tau$  являются компонентами скорости жидкости  $v_x, v_y, v_z$ :

$$\rho(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) - \rho g dz.$$

Компоненты скорости в левой части полученного равенства можно ввести под знаки дифференциала, а в его правой части сумму частных дифференциалов от давления заменить полным дифференциалом:

$$\frac{1}{2} \rho d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = -dp - \rho g dz.$$

В соответствии с правилом геометрического сложения векторов сумма квадратов компонент скорости в последнем уравнении заменяется квадратом модуля вектора скорости  $v^2$ . В результате дифференциальное уравнение энергии идеальной жидкости принимает следующий вид:

$$\rho g dz + dp + \frac{1}{2} \rho d(v^2) = 0.$$

Взяв неопределенные интегралы от всех его членов, получают равенство:

$$\rho g z + p + \rho v^2 / 2 = C = \text{const}, \quad (2.3)$$

где  $C$  – константа интегрирования.

Равенство (2.3), как и дифференциальные уравнения Эйлера (2.2), из которых оно получено, относится к движущемуся элементу жидкости и справедливо в любой точке его траектории вдоль элементарной струйки (рис. 2.2). Записав равенство (2.3) для двух поперечных сечений струйки, исключают из него константу интегрирования и получают в результате **уравнение Бернулли**, в котором все слагаемые имеют размерность давления (Па):

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho v_1^2 / 2 = \rho g z_2 + p_2 + \rho v_2^2 / 2. \quad (2.4)$$

Индексы 1 и 2 здесь означают, что величины относятся соответственно к сечениям 1 или 2 струйки.

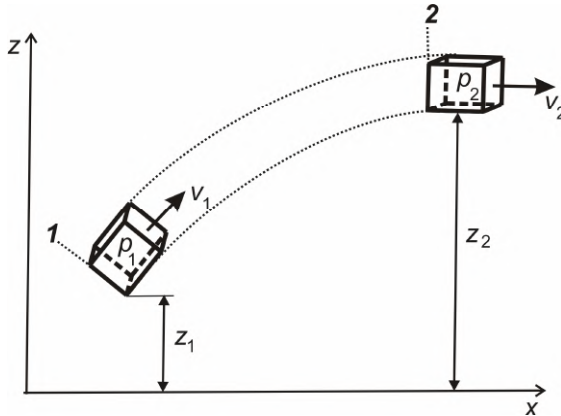


Рис. 2.2. Жидкие частицы, движущиеся в элементарной струйке

Все члены уравнения Бернулли (2.4) называются давлениями:  $\rho g z$  – **геометрическое**,  $p$  – **статическое**,  $\rho v^2/2$  – **динамическое** давление. Сумму всех трех членов уравнения называют **полным** гидродинамическим **давлением**.

Согласно уравнению Бернулли (2.4), **полное давление сохраняет свою величину** во всех поперечных сечениях элементарной струйки идеальной жидкости.

Часто уравнение Бернулли записывают в другой форме, которую получают путем деления уравнения (2.4) на плотность  $\rho$  и на ускорение свободного падения  $g$ :

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (2.5)$$

Все члены уравнения (2.5) имеют размерность высоты столба жидкости (м) и называются напорами:  $z$  – **геометрический**,  $p/(\rho g)$  – **пьезометрический**,  $v^2/(2g)$  – **динамический** напор. Сумму всех трех членов уравнения (2.5) называют **полным** гидродинамическим **напором**.

Согласно уравнению Бернулли (2.5), **полный напор сохраняет свою величину** во всех поперечных сечениях элементарной струйки идеальной жидкости.

### § 3. Физический смысл уравнения Бернулли

По своему физическому содержанию каждый член уравнения Бернулли (2.4) представляет собой энергию, приходящуюся на единицу объема жидкости:  $\rho g z$  – **потенциальную энергию положения**,  $p$  – **потенциальную энергию давления**,  $\rho v^2/2$  – **кинетическую энергию**. Можно показать, что размерность всех слагаемых в уравнении Бернулли выражается через единицу энергии (Джоуль):  $\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2 = \text{Н} \cdot \text{м}/\text{м}^3 = \text{Дж}/\text{м}^3$ . Сумма всех трех членов уравнения Бернулли представляет собой **механическую** энергию, приходящуюся на единицу объема жидкости, которая, в отличие от тепловой энергии, может быть полностью превращена в работу.

Таким образом, уравнение Бернулли выражает закон сохранения механической энергии: **сумма потенциальной и кинетической энергии идеальной жидкости не изменяется** вдоль траектории ее движения.

Отдельные члены уравнения могут изменять свои значения по длине струйки, но только так, чтобы уменьшение одного слагаемого компенсировалось увеличением другого. Например, если при течении идеальной жидкости скорость уменьшается, то ее кинетическая энергия частично переходит в потенциальную энергию давления, что соответствует переходу динамического давления  $v^2/(2g)$  в статическое давление  $p$ . Повышение статического давления при этом равно снижению динамического давления, так что величина полного давления вдоль струйки идеальной жидкости не изменяется.

Таким образом, динамическое или геометрическое давление способно переходить в статическое, и наоборот, статическое давление может переходить в геометрическое и динамическое. Также и геометрическое давление способно переходить в динамическое, а динамическое давление – в геометрическое.

Каждый член уравнения Бернулли, записанного в форме (2.5), по своему физическому содержанию также представляет собой энергию:  $z$  – потенциальную энергию положения,  $p/(\rho g)$  – потенциальную энергию давления,  $v^2/(2g)$  – кинетическую энергию. В этом случае энергия приходится на единицу веса жидкости, измеряемого в ньютонах:  $\text{м} = \text{м} \cdot \text{Н}/\text{Н} = \text{Дж}/\text{Н}$ . Сумма всех трех членов уравнения (2.5) представляет собой механическую энергию, приходящуюся на единицу веса жидкости. Таким образом, уравнение Бернулли в форме (2.5) также выражает закон сохранения механической энергии.

Отдельные члены уравнения (2.5) могут изменять свои значения по длине струйки, но только так, чтобы уменьшение одного слагаемого компенсировалось увеличением другого. При этом геометрический или динамический напор способен, например, переходить в пьезометрический, и наоборот, пьезометрический напор может переходить в геометрический и динамический. Также и геометрический напор способен переходить в динамический, а динамический напор – в геометрический.

Пьезометрический напор капельной жидкости можно измерить с помощью **пьезометрической трубки** (рис. 2.3), присоединенной к узкой или широкой части трубопровода (левая трубка в каждой паре трубок на рис. 2.3). Под действием статического давления  $p$  жидкость в трубке поднимется на высоту  $h$ , равную пьезометрическому напору  $p/(\rho g)$ .

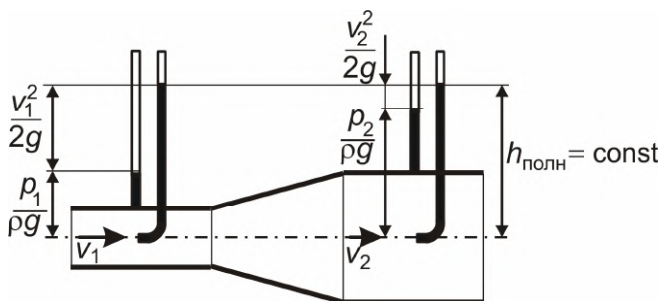


Рис. 2.3. Иллюстрация перехода динамического давления в статическое

Полный напор измеряется с помощью соседней правой пьезометрической трубки, нижний открытый конец которой загнут навстречу потоку. Струйка, текущая по оси трубы со скоростью  $v$ , попадает внутрь пьезометрической трубки, где жидкость неподвижна; динамический напор струйки  $v^2/(2g)$  переходит в пьезометрический  $p/(\rho g)$ , и в правой трубке создается более высокий столб жидкости  $h_{\text{полн}}$ , равный полному напору  $p/(\rho g) + v^2/(2g)$ .

В расширенной части трубопровода жидкость течет с меньшей скоростью. Пьезометрический напор  $p/(\rho g)$  здесь становится больше, чем в узком сечении трубопровода, за счет уменьшения динамического напора  $v^2/(2g)$ , в то время как полный напор остается неизменным.



#### § 4. Применение уравнения энергии в гидростатике

Если силы, действующие на жидкость, уравновешены (их равнодействующая равна нулю), то жидкость находится в состоянии относительного покоя, скорость всех ее частей считается равной нулю. В этом частном случае уравнение сохранения энергии (2.4) принимает следующий вид:

$$\rho g z_1 + p_1 = \rho g z_2 + p_2, \quad (2.6)$$

где индексами 1 и 2 обозначены величины в двух разных точках неподвижной жидкости.

Более удобно в неподвижной жидкости обозначать индексом 0 величины в точках, лежащих на какой-нибудь одной высоте, например на свободном уровне жидкости, а величины в точках на любом другом уровне оставлять без индекса (рис. 2.4). Имея в виду, что разность координат  $(z_0 - z)$  равна высоте столба жидкости  $h$ , уравнению (2.6) придают вид **закона Паскаля**:

$$p = p_0 + \rho g h, \quad (2.7)$$

Из формулы (2.7) видно, что статическое давление внутри жидкости складывается из внешнего давления  $p_0$ , приложенного к ее свободной поверхности, и давления, создаваемого весом столба жидкости высотой  $h$ . Высота  $h$ , так же как и координата  $z$ , является в данном случае напором жидкости.

Уравнение сохранения энергии (2.5), записанное для напоров, принимает в неподвижной жидкости следующий вид:

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g}. \quad (2.8)$$

Обычно его называют **основным уравнением гидростатики**. Согласно уравнению (2.8), полный гидростатический напор, равный сумме геометрического и пьезометрического напоров, во всех точках неподвижной жидкости остается постоянным. При изменении координаты  $z$  геометрический напор переходит в пьезометрический, или наоборот, пьезометрический напор – в геометрический.

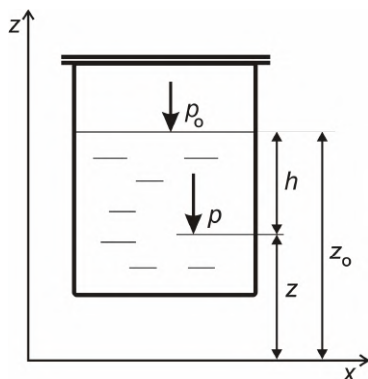


Рис. 2.4. Иллюстрация закона Паскаля

**Измерение давления.** Закон Паскаля применяется при измерении статического давления в трубах, каналах и аппаратах различного назначения с помощью манометра. Жидкостный манометр представляет собой U-образную стеклянную трубку (рис. 2.5), содержащую манометрическую жидкость (воду или ртуть), плотность  $\rho_m$  которой значительно больше, чем плотность  $\rho$  рабочей жидкости в аппарате. Одна ветвь трубки присоединена к аппарату, конец другой ветви открыт и воспринимает атмосферное давление  $p_{\text{атм}}$ . Со стороны аппарата к манометрической жидкости приложено рабочее давление  $p$  и давление столба рабочей жидкости  $\rho gh$ , под воздействием которых она поднимается в правой ветви трубки на высоту  $h_m$ . В результате в манометре возникает равновесие сил, каждая из которых отвечает закону Паскаля:

$$p + \rho gh = p_{\text{атм}} + \rho_m gh_m.$$

В большинстве случаев манометр устанавливают так, что величиной давления  $\rho gh$ , создаваемого весом столба рабочей жидкости, можно пренебречь. При этом измеряемая величина давления в аппарате определяется по формуле:

$$p = p_{\text{атм}} + \rho_m gh_m. \quad (2.9)$$

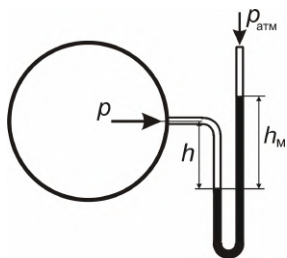


Рис. 2.5. Измерение давления с помощью манометра

Согласно формуле (2.9), высота столба манометрической жидкости  $h_m$ , после умножения ее на  $\rho_m g$  дает разность давлений  $(p - p_{\text{атм}})$ , называемую **избыточным** давлением. Следовательно, показания манометра всегда соответствуют избыточному давлению. Действительное давление в аппарате, в отличие от избыточного, называют **абсолютным**.

Манометр называется дифференциальным или **дифманометром**, если обе ветви U-образной трубки, содержащие манометрическую жидкость, воспринимают рабочие давления  $p_1$  и  $p_2$  в разных частях аппарата. Показания дифференциального манометра  $h_m$  соответствуют разности этих давлений:

$$p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho) g h_m. \quad (2.10)$$

Пример установки дифманометра можно видеть на рис. 2.7 и 2.8.

**Тяга дымовой трубы.** Из промышленной печи 1 в дымовую трубу 2 высотой  $H$  поступают горячие газы – продукты горения топлива (рис. 2.6). Если атмосферное давление на уровне выхода газов из трубы равно  $p_0$ , то, в соответствии с законом Паскаля (2.7), на входе воздуха в печь давление достигнет величины  $p_1$  за счет веса столба атмосферного воздуха плотностью  $\rho_1$ :

$$p_1 = p_0 + \rho_1 g H,$$

В то же время внизу дымовой трубы столб горячих газов меньшей плотности  $\rho_2$  создает давление  $p_2$  меньше, чем  $p_1$ ,

$$p_2 = p_0 + \rho_2 g H.$$

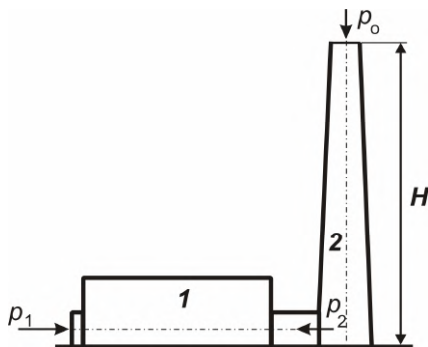


Рис. 2.6. Создание тяги дымовой трубы:  
1 – промышленная печь; 2 – дымовая труба

В результате в печи возникает перепад давлений (естественная тяга), вызывающая движение газов и непрерывное удаление из печи продуктов горения:

$$p_1 - p_2 = (\rho_1 - \rho_2) gH. \quad (2.11)$$

Следует иметь в виду, что формула (2.11) получена для идеальной невязкой жидкости. В случае реальных газов она несколько завышает тягу дымовой трубы.

## § 5. Измерение скорости и расхода жидкости

Измерение скорости жидкости обычно выполняют с помощью напорной трубки Пито–Прандтля (см. рис. 2.7). Она объединяет в себе две измерительные трубки – внутреннюю трубку и охватывающую ее наружную трубку. Дифманометр, присоединенный к измерительным трубкам, показывает высоту столба манометрической жидкости  $h_m$  и таким образом измеряет разность давлений в них  $\Delta p = (\rho_m - \rho)gh_m$ .

Внутренняя измерительная трубка, открытая с торца навстречу потоку жидкости, воспринимает полное давление  $p + \rho v^2/2$ . Наружная трубка воспринимает только статическое давление  $p$  через прорезы на ее боковой поверхности. В результате в измерительных трубках создается разность давлений  $\Delta p$ , равная динамическому давлению  $\rho v^2/2$  струйки текущей жидкости. Из этого равенства находят локальную скорость жидкости:

$$v = \sqrt{2\Delta p / \rho} = \sqrt{2(\rho_m - \rho)gh_m / \rho}. \quad (2.12)$$

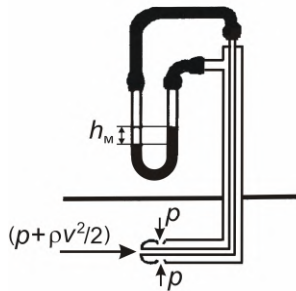


Рис. 2.7. Измерение скорости напорной трубкой

Измерение расхода жидкости выполняют с помощью сужающих устройств, устанавливаемых на трубопроводах. Наиболее простым устройством такого рода является **измерительная диафрагма** (см. рис. 2.8). Она представляет собой тонкий диск, в центре которого имеется круглое отверстие диаметром  $d_0$  с острой кромкой. Поток жидкости, текущей по трубопроводу, площадь поперечного сечения которого  $S_1$ , проходит через отверстие диафрагмы площадью  $S_0$  и сужается до поперечного сечения площадью  $S_2$ . Так как в узком сечении потока скорость  $v_2$  увеличивается, то, согласно уравнению Бернулли, давление  $p_2$  в узком сечении потока становится меньше, чем давление  $p_1$  в трубопроводе. Эта разность давлений измеряется с помощью дифманометра, как показано на рис. 2.8.

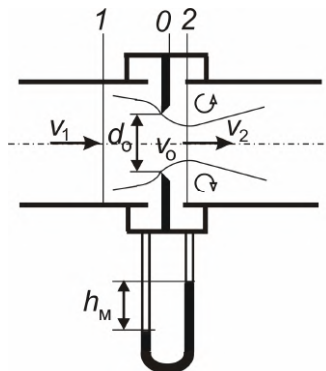


Рис. 2.8. Установка измерительной диафрагмы с дифманометром:  
0, 1, 2 – расчетные поперечные сечения канала;  $h_m$  – показания дифманометра

В рассматриваемом случае  $z_1 = z_2$ , и уравнение Бернулли (2.4) имеет вид

$$p_1 + \rho v_1^2 / 2 = p_2 + \rho v_2^2 / 2. \quad (2.13)$$

С учетом того, что скорости связаны между собой уравнением постоянства расхода  $v_1 S_1 = v_2 S_2$ , из равенства (2.13) следует выражение для скорости в узком сечении потока жидкости:

$$v_2 = \sqrt{2(p_1 - p_2) / \rho} / \sqrt{1 - S_2^2 / S_1^2}.$$

В инженерной практике скорость в узком сечении потока заменяют скоростью  $v_o$  в отверстии диафрагмы, площадь которого  $S_o$  известна. При этом в расчетную формулу вводят поправочный коэффициент расхода  $\alpha$  в виде множителя, величина которого определяется опытным путем:

$$v_o = \alpha \sqrt{2(p_1 - p_2) / \rho}.$$

Коэффициент расхода учитывает отклонения от теоретического уравнения, вызванные вязкостью реальной жидкости, и все геометрические поправки.

По уравнению (1.2) находят искомый массовый расход жидкости в трубопроводе:

$$G = \rho v_o S_o = \alpha \rho S_o \sqrt{2(p_1 - p_2) / \rho}. \quad (2.14)$$

Эта формула применяется на практике при условии, что коэффициент расхода  $\alpha$  остается постоянным в определенном диапазоне изменения расхода жидкости.

### Вопросы для самопроверки

1. Какой физический закон выражает уравнение Бернулли, примененное к элементарной струйке?
2. Как называются и какое энергетическое содержание имеют разные слагаемые в уравнении Бернулли?
3. Почему манометр всегда показывает избыточное давление?
4. Как создается тяга дымовой трубы?
5. Как удается измерить скорость жидкости с помощью напорной трубки?
6. Каковы назначение и принцип действия измерительной диафрагмы?

# Глава 3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

## § 1. Дифференциальные уравнения сохранения количества движения

При движении реальной вязкой жидкости ее частицы обмениваются друг с другом количеством движения, так что между ними возникает сила внутреннего трения. Напряжение силы внутреннего трения рассматривают как тензорную величину  $\sigma_{ij}$ . Индексы  $i$  и  $j$  могут принимать значения 1, 2 или 3 в соответствии с нумерацией трех координатных осей. Таким образом, **тензор напряжений**  $\sigma_{ij}$  имеет девять компонент, которые в декартовой системе координат  $x, y, z$  удобно представить в виде матрицы:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix}$$

Условимся, что первый индекс обозначает направление силы, второй индекс – направление нормали к поверхности, на которую действует сила. Тогда напряжения  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ , направленные по оси  $x$ , можно считать компонентами вектора  $\sigma_x$ , напряжения  $\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}$  по оси  $y$  – компонентами вектора  $\sigma_y$  и напряжения  $\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}$  по оси  $z$  – компонентами вектора  $\sigma_z$  (рис. 3.1).

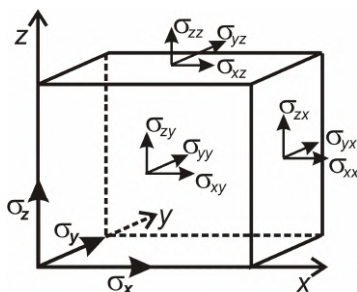


Рис. 3.1. Напряжения силы внутреннего трения на гранях элементарного объема:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – векторы напряжений, направленных вдоль осей  $x, y, z$

Изменение векторов  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  в тензорном поле записывается в виде их дивергенций по аналогии с формулой (1.11):

$$\operatorname{div} \sigma_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} \sigma_y = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} \sigma_z = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}.$$

В главе 2 было показано, что для идеальной жидкости интенсивность изменения силы давления в дифференциальных уравнениях Эйлера (2.2) имеет форму градиента скалярного статического давления. При рассмотрении реальной вязкой жидкости следует дополнительно учитывать интенсивность изменения тензорной величины сил внутреннего трения. Поэтому к правой части каждого уравнения (2.2) Эйлера добавляют дивергенцию соответствующего вектора напряжений ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  или  $\sigma_z$ ), взятую, как и градиент давления, с противоположным знаком. Таким образом получают систему дифференциальных уравнений сохранения количества движения вязкой жидкости:

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g - \left( \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right). \end{cases} \quad (3.1)$$

Число уравнений в системе (3.1) меньше числа входящих в них неизвестных величин, поэтому для девяти компонент тензора напряжений вводятся зависимости, связывающие их с компонентами скорости.



## § 2. Законы внутреннего трения вязкой жидкости

При течении жидкости ее частицы деформируются, изменяя свои размеры и форму. Например, под воздействием разности скоростей элементарный объем жидкости длиной  $dx$  и высотой  $dy$  (рис. 3.2, а) может удлиниться на величину абсолютной деформации  $d^2x$  при растяжении или изменять свою форму при сдвиге (рис. 3.2, б). Относительная деформация  $d\varepsilon$  определяется как отношение абсолютной деформации к начальному размеру элемента жидкости: при растяжении  $d\varepsilon = d^2x/dx$ , при сдвиге  $d\varepsilon = d^2x/dy$ .

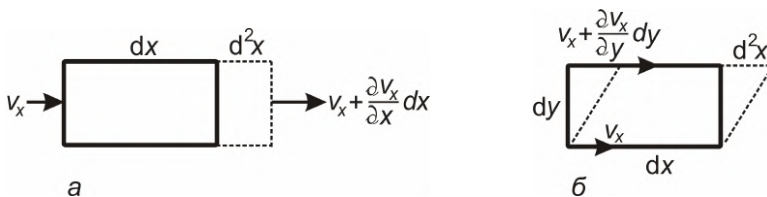


Рис. 3.2. Деформация жидкой частицы жидкости под воздействием скорости:

а – при удлинении; б – при сдвиге

**Закон внутреннего трения** при движении вязкой жидкости устанавливает пропорциональную зависимость напряжения силы трения  $\sigma$  от скорости деформации элементов жидкости  $d\varepsilon/dt$  (но не от величины деформации  $\varepsilon$ , что характерно для твердых тел):

$$\sigma = -\mu d\varepsilon/dt, \quad (3.2)$$

где  $t$  – время,  $\mu$  – коэффициент пропорциональности.

Наиболее наглядно этот закон проявляется при одномерном течении, например при изменении скорости  $u$  только по направлению  $n$  (рис. 3.3). В этом случае, введя в формулу (3.2) выражение относительной деформации  $\varepsilon$  при сдвиге и поменяв местами приращения времени  $dt$  и координаты  $dn$ , получим в числителе дифференциал скорости  $du$ :

$$\sigma = -\mu \frac{d\varepsilon}{dt} = -\mu \frac{d^2x/dn}{dt} = -\mu \frac{d^2x/dt}{dn} = -\mu \frac{du}{dn}.$$

Результирующая зависимость принимает форму **закона внутреннего трения Ньютона**

$$\sigma = -\mu \frac{\partial v}{\partial n}, \quad (3.3)$$

которому можно дать следующую формулировку: **при одномерном движении жидкости сила внутреннего трения пропорциональна градиенту скорости**. Знак минус указывает на то, что перенос количества движения происходит в направлении противоположном возрастанию скорости.

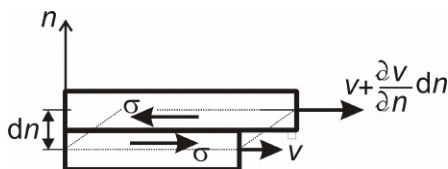


Рис. 3.3. Возникновение силы внутреннего трения в вязкой жидкости

Следует иметь в виду, что при одномерном движении тензор напряжений имеет только одну компоненту  $\sigma$ , не равную нулю, а скорость рассматривается как скалярная величина, к которой, хотя и с некоторыми ограничениями, применимо математическое понятие градиента.

В случае трехмерного движения несжимаемой жидкости компоненты напряжений определяются более сложными линейными соотношениями, предложенными Стоксом, которые удобно представить в тензорной форме:

$$\sigma_{ij} = -\mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.4)$$

Здесь индексы  $i$  и  $j$  по-прежнему принимают значения 1, 2 или 3 в соответствии с нумерацией трех координатных осей. Выражение в скобках в формуле (3.4) называют **тензором скоростей деформации**. Таким образом, соотношениями Стокса устанавливается линейная зависимость тензора напряжений от тензора скоростей деформации.

Коэффициент пропорциональности  $\mu$  в линейных соотношениях (3.3) и (3.4) называется **динамическим коэффициентом вязкости**. По своему физическому смыслу он представляет собой силу внутреннего трения, действующую на единице площади при градиенте скорости, равном единице. Отсюда следует и его размерность Па·с (паскаль-секунда).

Динамический коэффициент вязкости  $\mu$  является физическим параметром, который зависит от интенсивности молекулярного взаимодействия между соседними частицами жидкости или газа. С повышением температуры вязкость капельных жидкостей уменьшается, так как при этом ослабевают силы молекулярного притяжения. Вязкость газов, наоборот, увеличивается с повышением температуры за счет более интенсивного движения молекул и усиления молекулярного обмена количеством движения в газообразной среде.

Часто для характеристики интенсивности молекулярного переноса количества движения в жидкости применяют **кинематический коэффициент вязкости**  $\nu$ , равный отношению динамического коэффициента вязкости к плотности жидкости:

$$\nu \equiv \mu / \rho. \quad (3.5)$$

Кинематический коэффициент вязкости измеряется в  $\text{м}^2/\text{с}$ .

### § 3. Дифференциальные уравнения Навье–Стокса

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ji}$  в уравнениях сохранения количества движения (3.1) заменяют компонентами тензора скоростей деформации в соответствии с линейными соотношениями (3.4). В результате получают дифференциальные уравнения Навье–Стокса для компонент скорости  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  по трем осям координат:

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ \rho \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \\ \rho \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \end{cases} \quad (3.6)$$

Часто для упрощения записи уравнений сумму частных производных в скобках обозначают символом  $\nabla^2$  оператора Лапласа:

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x, \\ \rho \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_y, \\ \rho \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \mu \nabla^2 v_z. \end{cases}$$

Уравнения Навье–Стокса для сжимаемого газа содержат дополнительные слагаемые, которые здесь не рассматриваются.

В левые части уравнений (3.6) входят полные (субстанциональные) производные от компонент скорости по времени, которые связаны с частными производными от соответствующих компонент скорости выражениями (1.8). Так как в дальнейшем будут изучаться лишь установившиеся течения жидкости, то целесообразно заменить полные производные в уравнениях (3.6) выражениями (1.9), справедливыми для стационарных процессов. В результате уравнения Навье–Стокса в частных производных для стационарного (установившегося) движения вязкой несжимаемой жидкости приобретают следующий вид:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g. \end{cases} \quad (3.7)$$

Первая группа слагаемых в левой части уравнений (3.7) учитывает **конвективный** перенос количества движения путем перемещения элементарных объемов жидкости, вторая группа слагаемых – **диффузионный** перенос количества движения путем хаотического молекулярного движения. Слагаемые в правой части уравнений (3.7) учитывают перенос количества движения под действием перепада давления и силы тяжести.

В то же время, члены уравнений Навье–Стокса (3.7), имеющие размерность Н/м<sup>3</sup>, можно рассматривать как математическое выражение сил (инерции, вязкости, давления и тяжести), соответствующих единице объема жидкости.

Уравнения Навье–Стокса являются основными дифференциальными уравнениями динамики вязкой жидкости, выражающими закон сохранения количества движения. Совместно с дифференциальными уравнениями неразрывности потока (1.14) они устанавливают связь между компонентами скорости и полем давления с учетом действия массовых сил. Хотя попытки их аналитического решения в большинстве случаев встречаются с непреодолимыми затруднениями, в настоящее время система дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости может быть решена численно для большинства инженерных задач с помощью компьютерных программ.

#### § 4. Понятие о подобии гидродинамических процессов

Большинство инженерных задач в гидрогазодинамике решено с помощью экспериментальных исследований. Теория подобия дает возможность обобщить результаты экспериментов и распространить их на достаточно обширную группу подобных процессов.

**Подобными** называют явления или процессы, имеющие одинаковую физическую природу и отличающиеся друг от друга только своими масштабами. Для подобия гидродинамических процессов потребуется, чтобы они протекали в пространстве одинаковой формы.

В строгом смысле **геометрическое** подобие означает, что соотношения всех сходственных размеров и координат в двух подобных системах равно постоянной величине  $k_l$ , называемой константой подобия. Если отметить размеры в разных системах одним и двумя штрихами, то условие геометрического подобия примет следующий вид (рис. 3.4):

$$\frac{l'_0}{l''_0} = \frac{l'}{l''} = \frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''} = \dots = k_l.$$

Таким образом, константа подобия показывает соотношение масштабов геометрически подобных систем.

Для математических пропорций отношение числителей равно отношению их знаменателей. Поэтому в геометрически подобных системах предыдущее равенство заменяют соотношениями, называемыми инвариантами подобия  $i_l$ :

$$\frac{l'}{l'_0} = \frac{x'}{l'_0} = \frac{y'}{l'_0} = i_l, \quad \frac{l''}{l'_0} = \frac{x''}{l'_0} = \frac{y''}{l'_0} = i_l.$$

Инварианты подобия показывают, что сходственные точки геометрически подобных систем имеют равные безразмерные координаты.

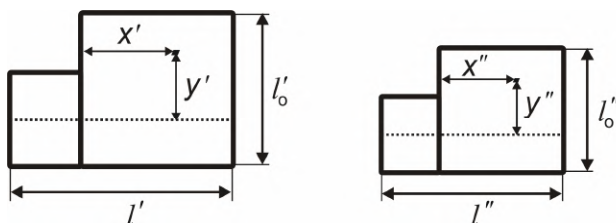


Рис. 3.4. Геометрическое подобие гидродинамических систем

Также и подобные гидродинамические процессы, выполненные в разных масштабах, характеризуются в сходственных точках численно равными безразмерными физическими величинами. Следовательно, для всей группы подобных процессов должно быть справедливо одно и то же безразмерное дифференциальное уравнение. Другими словами, подобные процессы имеют тождественные дифференциальные уравнения.

Запишем в безразмерном виде третье уравнение из системы (3.7) дифференциальных уравнений стационарного движения вязкой жидкости Навье–Стокса. Считая движение одномерным, придадим уравнению следующий вид:

$$\rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g. \quad (3.8)$$

Первое слагаемое в нем представляет собой силу инерции, второе – силу внутреннего трения, третье – силу давления и четвертое – силу тяжести.

Выберем определяющие параметры – линейный размер  $l_0$ , скорость  $v_0$ , перепад давления  $\Delta p$ . С их помощью определим безразмерные переменные – координату  $\bar{z} \equiv z/l_0$ , скорость  $\bar{v}_z \equiv v_z/v_0$ , давление  $\bar{p} \equiv p/\Delta p$ . Безразмерные переменные введем в уравнение (3.8):

$$\left(\rho \frac{v_o^2}{l_o}\right) \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} - \left(\mu \frac{v_o}{l_o^2}\right) \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}^2} = - \left(\frac{\Delta p}{l_o}\right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} - (\rho g).$$

В скобках сгруппированы постоянные множители, на которые пришлось умножить и поделить члены уравнения, чтобы сохранить неизменной их величину.

Приведем это дифференциальное уравнение к безразмерному виду, поделив все его слагаемые на группу физических величин в первых скобках:

$$\tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} - \left(\frac{\mu}{\rho v_o l_o}\right) \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}^2} = - \left(\frac{\Delta p}{\rho v_o^2}\right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} - \left(\frac{l_o g}{v_o^2}\right). \quad (3.9)$$

Следует иметь в виду, что уравнения считаются тождественными, если они имеют не только одинаковый общий вид, но и численно равные коэффициенты. Поэтому в дифференциальном уравнении (3.9) безразмерные комплексы величин, заключенные в скобки, следует рассматривать как инварианты гидродинамического подобия, величина которых не изменяется при переходе от одного подобного процесса к другому. Только при таком условии безразмерное дифференциальное уравнение может быть без изменения применено ко всей группе подобных процессов.

## § 5. Числа гидродинамического подобия

Безразмерные комплексы физических величин, входящие в дифференциальное уравнение (3.9) в виде инвариант подобия, называются числами гидродинамического подобия. По физическому смыслу они представляют собой соотношение силы инерции и какой-либо другой силы (вязкости, давления, тяжести).

Число **Рейнольдса** представляет собой отношение силы инерции к силе внутреннего трения (вязкости):

$$\text{Re} \equiv \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu}.$$

С его помощью учитывается влияние вязкости на движение жидкости.

Число **Эйлера** представляет собой отношение силы давления к силе инерции:

$$Eu \equiv \frac{\Delta p}{\rho v^2}.$$

С его помощью учитывается влияние перепада давления на движение жидкости.

Число **Фруда** представляет собой отношение силы инерции к силе тяжести:

$$Fr \equiv \frac{v^2}{gl}.$$

С его помощью учитывается влияние силы тяжести на движение жидкости.

В ряде случаев первичные числа подобия, полученные из дифференциальных уравнений, преобразуют в производные числа подобия, чтобы исключить из них какую-либо неизвестную физическую величину.

Если не известна скорость, то вместо числа Фруда применяют число **Галилея**, из которого скорость исключена:

$$Ga \equiv \frac{Re^2}{Fr} = \frac{l^3 g}{v^2}.$$

Число **Архимеда** позволяет дополнительно учесть изменение плотности (от  $\rho$  до  $\rho_0$ ) в объеме жидкой среды:

$$Ar \equiv Ga \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} = \frac{l^3 g}{v^2} \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}.$$

Число **Лященко** характеризует скорость движения твердых частиц в жидкости под действием силы тяжести. Из него исключен линейный размер частиц:

$$Ly \equiv \frac{Re^3}{Ar} = \frac{v^3}{vg} \frac{\rho}{\rho_0 - \rho}.$$

В числа подобия входят **определяющие** значения физических величин, наиболее характерные для потока жидкости. Под определяющим линейным размером  $l$  трубопровода обычно понимается его внутренний диаметр  $d$  (а не длина). Если же канал имеет некруглое поперечное сечение, то определяющим линейным размером считается **эквивалентный диаметр**:



$$d_3 = 4S/\Pi,$$

где  $S$  – площадь "живого" сечения канала (т. е. части поперечного сечения, заполненной жидкостью),  $\Pi$  – смоченный периметр.

Нетрудно убедиться, что эквивалентный диаметр канала  $d_3$  равен внутреннему диаметру  $d$  трубопровода круглого поперечного сечения с такой же величиной соотношения  $S/\Pi$ , что и у рассматриваемого канала.

## § 6. Теоремы подобия

В основе теории подобия лежат три теоремы, которые в большинстве случаев излагаются без доказательств.

**Прямая теорема.** *Если процессы подобны, то соответственно равны характеризующие их числа подобия.* Прямая теорема дает возможность проверить, имеет ли место подобие изучаемых гидродинамических процессов.

**Обратная теорема.** *Процессы подобны в тех случаях, когда их определяющие числа подобия соответственно равны друг другу.* **Определяющими** называют числа подобия, содержащие в себе физические величины, от которых зависит протекание процесса. Остальные числа подобия являются **определяемыми**.

Обратная теорема указывает условия, которые следует обеспечивать при создании физических моделей для изучения гидродинамических процессов.

Наибольшее практическое значение имеет  **$\pi$ -теорема** теории подобия. *Решение любого дифференциального уравнения можно представить в виде зависимости между числами подобия, полученными из этого уравнения.*

Алгебраическую зависимость между числами подобия называют обобщенным уравнением. Обобщенное уравнение можно записать, например, в виде некоей равной нулю функции  $f$  от чисел подобия, обозначенных здесь символами  $\pi_n$ :

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0.$$

Обобщенные уравнения позволяют находить значения определяемых чисел подобия по известным определяющим числам.

На основании  $\pi$ -теоремы решается вопрос о том, как обрабатывать экспериментальные данные: результаты опытов следует представлять в виде обобщенных уравнений. Эмпирическое уравнение, полученное для одного конкретного процесса,

будучи записано в обобщенном виде, становится справедливым для всей группы подобных процессов.

Более того, часто изучают дополнительное влияние на гидродинамические процессы простых соотношений физических величин, которые называются симплексами. Например, симплексом является соотношение длины и диаметра трубопровода  $l/d$ . После ввода симплексов в обобщенные уравнения расширяется область применения экспериментальных зависимостей.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Какая связь существует между компонентами тензора напряжений и тензора скоростей деформации в вязкой жидкости?
2. Какой физический смысл и размерность имеет динамический коэффициент вязкости?
3. Какой физический смысл выражают члены дифференциальных уравнений Навье–Стокса?
4. Какие процессы в гидродинамике считаются подобными?
5. В чем состоит различие между первичными и производными числами подобия?

## Глава 4. ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

### § 1. Условия ламинарного течения жидкости в трубах

В движущейся жидкости постоянно возникают случайные малые возмущения – колебания давления или скорости отдельных ее частиц. При этом, вследствие неразрывности потока, любое случайное перемещение жидкой частицы вызывает кратковременное изменение (пульсацию) скорости окружающих ее элементов жидкой среды. В зависимости от соотношения сил инерции и вязкости случайные возмущения в жидкости либо затухают, либо вызывают появление новых пульсаций скорости.

При течении жидкости по трубопроводу соотношение сил инерции и вязкости характеризуется числом Рейнольдса:

$$Re = \rho v d / \mu ,$$

где  $\rho$ ,  $\mu$  – плотность и динамический коэффициент вязкости жидкости,  $v$  – средняя скорость (в поперечном сечении трубы),  $d$  – внутренний диаметр трубы.

Установлено экспериментально, что, если  $Re < 2300$ , то в трубе наблюдается **ламинарное** (т. е. слоистое) течение, при котором слои жидкости скользят относительно друг друга, не разрываясь, а случайные пульсации скорости и давления подавляются силами внутреннего трения и не влияют на движение жидкости. Если же  $Re > 10000$ , то в трубе наблюдается **турбулентное** движение жидкости, при котором происходит интенсивное возникновение и хаотическое перемещение вихрей, сопровождающееся беспорядочными пульсациями скорости в каждой точке потока. В интервале значений числа Рейнольдса от 2300 до 10000 реализуется **переходный** режим течения в трубах, при котором ламинарные и турбулентные движения в разных частях потока перемежаются, чередуясь друг с другом во времени.

Хотя ламинарное течение в технических устройствах встречается значительно реже, чем турбулентное, его наиболее простые фундаментальные закономерности нуждаются в специальном рассмотрении.

## § 2. Приближение пограничного слоя

Тот факт, что такие маловязкие жидкости, как вода или воздух, могут создавать значительное сопротивление движущимся в них телам, получил объяснение после того, как Прандтль ввел понятие пограничного слоя.

На поверхности твердого тела обычно наблюдается эффект "прилипания" жидкости, так что на неподвижной поверхности, обтекаемой жидкостью, скорость равна нулю. По мере удаления от твердой поверхности продольная скорость жидкости  $u$ , направленная по оси  $x$ , быстро приближается к ее значению  $u_\infty$  в невозмущенном ядре потока. Таким образом, рядом с обтекаемой поверхностью образуется относительно тонкий **динамический пограничный слой**, в котором продольная скорость  $u$  заметно изменяется по нормали  $y$  к поверхности, а поперечная скорость  $v$  мала (рис. 4.1). Именно большие "градиенты" продольной скорости, образующиеся в пограничном слое, и приводят к появлению значительной силы внутреннего трения на поверхности твердого тела, обтекаемого маловязкой жидкостью.

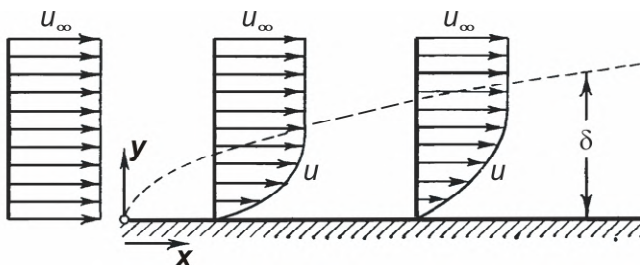


Рис. 4.1. Образование пограничного слоя на плоской пластине:  
 $u$  – скорость вблизи пластины;  $u_\infty$  – скорость вдали от пластины;  $\delta$  – толщина пограничного слоя (изображение непропорционально увеличено по оси  $y$ )

В пограничном слое реализуются следующие неравенства, позволяющие упростить для этой области уравнения Навье–Стокса (знак  $\gg$  означает "много больше"):

$$u \gg v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Подставляя эти неравенства в первое уравнение Навье–Стокса (3.7), определяющее компоненту скорости по оси  $x$ , и полагая, что в сумме однотипных величин пренебрежимо малые

слагаемые можно отбросить, получают дифференциальное уравнение движения вязкой жидкости в приближении двумерного пограничного слоя:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.1)$$

Целесообразно несколько изменить вид конвективных членов этого уравнения, добавив к ним левую часть дифференциального уравнения неразрывности потока (1.15), равную нулю, умножив ее при этом на  $u$ :

$$\left( u \frac{\partial \rho u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) + \left( \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Теперь первые две группы слагаемых, взятых в скобки, можно объединить, пользуясь математическим правилом дифференцирования произведения двух функций:

$$\frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.2)$$

Второе дифференциальное уравнение Навье–Стокса (3.7), определяющее компоненту скорости по оси  $y$ , в приближении пограничного слоя сводится к простому равенству:

$$\partial p / \partial y \approx 0, \quad (4.3)$$

на основании которого можно полагать, что по толщине пограничного слоя давление остается практически постоянным.

Если жидкость течет по трубе, то дифференциальное уравнение пограничного слоя должно быть записано с учетом выражения для дивергенции тензора напряжений в цилиндрических координатах:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \eta \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.4)$$

Главное отличие записи дифференциального уравнения (4.4) в цилиндрических координатах от уравнения (4.1) состоит в том, координата  $r$  по радиусу трубы находится в нем под знаком производной. В соответствии с правилом дифференцирования произведения функций, это приводит к появлению в уравнении дополнительного слагаемого, учитывающего криволинейность цилиндрической системы координат.

### § 3. Явление отрыва пограничного слоя

Если при расширении канала средняя скорость жидкости уменьшается, то давление по направлению ее течения возрастает в соответствии с уравнением Бернулли (2.4). Изменение давления распространяется по толщине пограничного слоя, согласно равенству (4.3), вплоть до обтекаемой твердой поверхности; возникает эффект повышения давления вдоль обтекаемой поверхности в направлении движения жидкости.

Так как скорость  $u_1$  в пограничном слое меньше, чем в остальной части потока, величина его кинетической энергии может оказаться недостаточной для преодоления возрастающего перепада давления. В этом случае жидкость в пограничном слое еще более замедляет свое движение, толщина пограничного слоя увеличивается, рядом с обтекаемой поверхностью возникает обратное течение, в результате чего пограничный слой отрывается от нее (рис. 4.2).

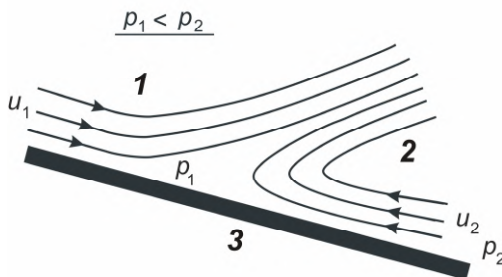


Рис.4.2. Схематичное изображение отрыва пограничного слоя:  
1 – линии тока в пограничном слое; 2 – вихревая область;  
3 – наклонная стенка канала

Отрыв пограничного слоя сопровождается образованием вихревой области, в которой действие сил внутреннего трения приводит к повышенной потере механической энергии потока.

### § 4. Напряжение силы внутреннего трения в трубе

Стационарное течение жидкости в трубе или канале, например, прямоугольного сечения, можно разделить по длине на два участка (рис. 4.3). На первом (начальном) участке длиной примерно  $40d$  ( $d$  – внутренний диаметр трубы) образуется и постепенно утолщается динамический пограничный слой. На втором участке пограничный слой занимает все поперечное сечение

вплоть до оси канала, и параметры потока стабилизируются. На участке стабилизированного течения поперечная компонента скорости  $v$  равна нулю, в то время как продольная скорость  $u$  изменяется только по радиусу трубы  $r$ , оставаясь постоянной по оси  $x$  вдоль канала.

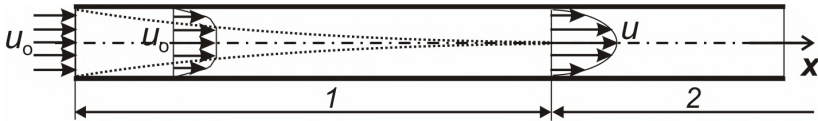


Рис. 4.3. Схема течения жидкости в трубе:  
1 – начальный участок на входе; 2 – участок стабилизированного течения;  
 $u_0$  – скорость на входе и в ядре потока

При стабилизированном движении жидкости в трубе, внутренний радиус которой равен  $R$ , задача становится одномерной, так что в левой части дифференциального уравнения пограничного слоя (4.4) остается только одно слагаемое (здесь координата  $r$  отсчитывается от оси трубы, как показано на рис. 4.4):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( -\eta \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\Delta p}{l}. \quad (4.5)$$

Правая часть в этом равенстве заменена величиной падения давления  $\Delta p = p_1 - p_2$  на единице длины канала  $l$ .

Заменяв выражение в скобках напряжением силы внутреннего трения  $\sigma$  по закону Ньютона (3.3) и частные производные для одномерной задачи полными, уравнению (4.5) можно придать следующий вид:

$$\frac{d(r\sigma)}{rdr} = \frac{\Delta p}{l}, \quad (4.6)$$

В дифференциальном уравнении (4.6) разделяют переменные:  $d(r\sigma) = (\Delta p/l) r dr$ . Затем интегрируют обе части равенства:

$$r\sigma = \frac{\Delta p}{l} \frac{r^2}{2} + C. \quad (4.7)$$

Чтобы найти константу интегрирования  $C$ , записывают предыдущее равенство (4.7) на поверхности стенки (при  $r = R$ ):

$$C = R\sigma_{\text{ст}} - \frac{\Delta p}{2l} R^2 = 0,$$

и убеждаются, что константа интегрирования равна нулю, вследствие того, что действующая на стенке сила трения  $\sigma_{\text{ст}} \cdot 2\pi Rl$  уравновешена силой  $\Delta p \cdot \pi R^2$ , создаваемой перепадом давления в поперечном сечении трубы (см. рис.4.4).

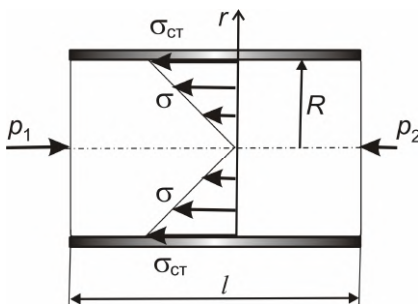


Рис. 4.4. Напряжения внутреннего трения при стабилизированном течении жидкости

Таким образом, напряжение силы внутреннего трения распределено по радиусу трубы по линейному закону:

$$\sigma = \frac{\Delta p}{2l} r. \quad (4.8)$$

Из формулы (4.8) следует, что на участке стабилизированного течения напряжение  $\sigma$  силы внутреннего трения достигает наибольшего значения на поверхности стенки трубы.

$$\sigma_{\text{ст}} = \Delta p / (2Rl). \quad (4.9)$$

На оси трубы оно равно нулю (см. рис. 4.4).

## § 5. Закономерности течения вязкой жидкости в трубе

Линейная зависимость (4.8) превращается в дифференциальное уравнение после подстановки в нее равенства (3.3), выражающего закон внутреннего трения Ньютона:

$$-\mu \frac{du}{dr} = \frac{\Delta p}{2l} r. \quad (4.10)$$



Разделяя переменные в дифференциальном уравнении (4.10),  $du = -(\Delta p/2\mu l)rdr$ , и интегрируя затем обе части равенства, находят распределение скорости по радиусу трубы:

$$u = -\frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + C. \quad (4.11)$$

Константу интегрирования  $C$  определяют из граничного условия на стенке трубы:  $u = 0$  при  $r = R$ ,

$$C = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2.$$

Подставив выражение для константы интегрирования в уравнение (4.11), получают в итоге закон параболического изменения по радиусу трубы скорости ламинарного стабилизированного потока жидкости (рис.4.5):

$$u = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2). \quad (4.12)$$

Из формулы (4.12) следует, что на оси трубы (при  $r = 0$ ) скорость жидкости достигает максимального значения

$$u_{max} = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2, \quad (4.13)$$

что позволяет несколько упростить запись параболической зависимости:

$$u = u_{max} \left(1 - r^2/R^2\right). \quad (4.14)$$

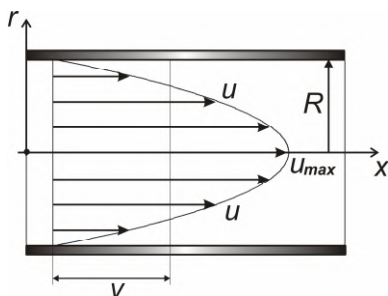


Рис. 4.5. Параболическое распределение скорости  $u$  при ламинарном течении в трубе:  
 $u_{max}$  – максимальная скорость;  $v$  – средняя скорость жидкости

## § 6. Объемный расход и перепад давления в трубе

При известном распределении скорости по радиусу трубы появляется возможность найти объемный расход жидкости  $V_{\text{ж}}$ . С этой целью записывают расход жидкости  $dV_{\text{ж}}$ , протекающей со скоростью  $u$  через кольцевой элемент поперечного сечения трубы. Площадь кольцевого элемента ( $dS = 2\pi r dr$ ) вычисляется, как площадь узкой полоски шириной  $dr$ , длина которой равна длине окружности  $2\pi r$ , так что элементарный объемный расход равен

$$dV_{\text{ж}} = u \cdot 2\pi r dr = 2\pi u_{\text{max}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr.$$

Интегрируя это равенство по радиусу от  $r = 0$  до  $r = R$ , получают величину объемного расхода жидкости через полное поперечное сечение трубы:

$$V_{\text{ж}} = 2\pi u_{\text{max}} \left( \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2} \right) = \frac{\pi}{2} u_{\text{max}} R^2. \quad (4.15)$$

Тот же объемный расход жидкости в трубе может быть найден по средней скорости  $v$  с помощью уравнения расхода (1.2):

$$V_{\text{ж}} = v \cdot \pi R^2. \quad (4.16)$$

Из равенства правых частей двух последних формул следует соотношение между средней и максимальной скоростью при ламинарном стабилизированном течении жидкости в трубе – **средняя скорость равна половине максимальной** (см. рис. 4.5):

$$v = u_{\text{max}}/2. \quad (4.17)$$

Полученные зависимости позволяют установить связь между средней скоростью  $v$  и перепадом давления  $\Delta p$ , возникающим при ламинарном движении вязкой жидкости в трубе. Для этого следует подставить выражение (4.13) для максимальной скорости  $u_{\text{max}}$  в соотношение (4.17):

$$v = \frac{\Delta p}{8\mu l} R^2 = \frac{\Delta p}{32\mu l} d^2,$$

где  $d$  – внутренний диаметр трубы.

Отсюда получена искомая зависимость

$$\Delta p = 32 \frac{\mu l}{d^2} v. \quad (4.18)$$

Она показывает, что при ламинарном течении перепад давления  $\Delta p$  пропорционален скорости жидкости  $v$  и длине трубы  $l$ .

### **Вопросы для самопроверки**

1. При каких условиях происходит отрыв пограничного слоя?
2. Чем уравнения пограничного слоя отличаются от дифференциальных уравнений Навье–Стокса?
3. Чему равна толщина пограничного слоя на участке стабилизированного течения жидкости в трубе?
4. По какому закону распределяется скорость по радиусу трубы при ламинарном течении жидкости?
5. Каково соотношение средней и максимальной скорости ламинарного потока жидкости в трубе?

## Глава 5. ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

### § 1. Статистические характеристики турбулентности

Турбулентное движение характеризуется беспорядочными пульсациями скорости, которые происходят в каждой точке потока с большой частотой, достигающей нескольких сотен пульсаций в секунду (рис. 5.1). Естественно, что при изучении турбулентности используются статистические методы теории вероятности, согласно которым **мгновенную** скорость  $v$  представляют как алгебраическую сумму **осредненной** скорости  $\bar{v}$  и отклонения от нее в виде **пульсации** скорости  $v'$ :

$$v = \bar{v} + v' . \quad (5.1)$$

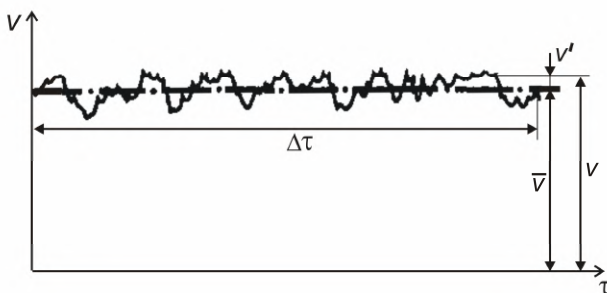


Рис. 5.1. Пульсации скорости жидкости в турбулентном потоке:

$v$  — мгновенная скорость;  $\bar{v}$  — осредненная скорость;

$v'$  — пульсация скорости;  $\tau$  — время

Осредненную скорость определяют по совокупности случайных значений мгновенной скорости, имевшей место за сравнительно короткий интервал времени  $\Delta\tau$ :

$$\bar{v} = \frac{1}{\Delta\tau} \int_0^{\Delta\tau} v \, d\tau .$$

Как правило, измерительные приборы воспринимают осредненные значения измеряемых величин. Так как пульсации происходят с равной вероятностью во взаимно противоположных направлениях, то их статистическое осреднение дает нуль (треугольные скобки служат здесь знаком осреднения):

$$\langle v' \rangle = \frac{1}{\Delta \tau} \int_0^{\Delta \tau} v' d\tau = 0.$$

Также и осреднение произведения пульсации  $v'$  на постоянный множитель, например на осредненную скорость  $\bar{v}$ , дает в результате нуль, так как постоянную величину можно вынести за знак осредняющего интеграла:

$$\langle \bar{v} v' \rangle = \frac{1}{\Delta \tau} \int_0^{\Delta \tau} \bar{v} v' d\tau = \frac{\bar{v}}{\Delta \tau} \int_0^{\Delta \tau} v' d\tau = 0.$$

В то же время следует иметь в виду, что осредненное значение двух взаимозависимых пульсаций  $\langle v'_i v'_j \rangle$ , называемое **корреляцией** пульсаций скорости, отличается от нуля (здесь индексы  $i, j$  могут принимать значения 1, 2 или 3 в соответствии с нумерацией трех координатных осей). В частности, можно найти осредненные значения квадрата пульсации скорости  $\langle v_i'^2 \rangle$  в направлении каждой из координатных осей и с их помощью определить **степень турбулентности** потока,

$$Tu \equiv \sqrt{\langle v_x'^2 \rangle + \langle v_y'^2 \rangle + \langle v_z'^2 \rangle} / \bar{v},$$

и **кинетическую энергию турбулентности**, приходящуюся на единицу массы жидкости,

$$k_\tau \equiv \left( \langle v_x'^2 \rangle + \langle v_y'^2 \rangle + \langle v_z'^2 \rangle \right) / 2.$$

## § 2. Турбулентные напряжения сил внутреннего трения

Чтобы исследовать влияние турбулентных пульсаций на течение жидкости, компоненты мгновенной скорости в уравнениях Навье—Стокса заменяют суммой средней и пульсационной скорости (5.1). Воспользуемся для этой цели более простым уравнением движения (4.2) в приближении пограничного слоя:

$$\frac{\partial \rho(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial \rho(\bar{v} + v')(\bar{u} + u')}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial y^2} = - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

После раскрытия скобок и осреднения величин по правилам предыдущего параграфа получают дифференциальное уравнение Рейнольдса (в приближении пограничного слоя):

$$\left( \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \langle \rho u' u' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \rho u' v' \rangle}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.2)$$

В уравнение Рейнольдса (5.2) входят такие же слагаемые (они взяты в скобки), как и в уравнение пограничного слоя (4.2), отличающиеся только тем, что функцией в них является не мгновенная, а осредненная скорость. Более существенное отличие этих уравнений заключается в появлении двух новых слагаемых, в виде производных от корреляций компонент пульсационной скорости.

Сопоставляя уравнение (5.2) с дифференциальными уравнениями сохранения количества движения (3.1), приходят к выводу, что корреляции пульсаций скорости под знаком производной, умноженные на плотность  $\rho$ , равноценны компонентам тензора напряжений. Следовательно, уравнения Рейнольдса учитывают дополнительные напряжения внутреннего трения, возникающие при переносе количества движения турбулентными пульсациями:

$$\sigma_{xx}^T = -\langle \rho u' u' \rangle, \quad \sigma_{xy}^T = -\langle \rho u' v' \rangle. \quad (5.3)$$

Как правило, турбулентные напряжения много больше, чем аналогичные напряжения при молекулярном переносе количества движения.

В инженерной практике принято турбулентные напряжения считать пропорциональными производным от осредненных компонент скорости по аналогии с законом внутреннего трения Ньютона (3.3):

$$\sigma_T = -\mu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}, \quad (5.4)$$

где  $\mu_T$  — коэффициент турбулентной вязкости (или точнее, турбулентный аналог динамического коэффициента вязкости).

После подстановки выражения (5.4) в уравнение Рейнольдса (5.2) получают дифференциальное уравнение турбулентного движения в приближении пограничного слоя (знаки осреднения скоростей в нем опущены):

$$\frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} - (\mu + \mu_T) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) учитывает, что диффузионный перенос количества движения осуществляется в общем случае под действием как молекулярной, так и турбулентной вязкости. Суммарный коэффициент вязкости обычно называют эффективным:

$$\mu_{\text{эф}} = \mu + \mu_T.$$

Коэффициент турбулентной вязкости не является физической константой. Он зависит, прежде всего, от параметров движения жидкости. Обоснование методов его расчета является задачей научного исследования турбулентности.

### § 3. Генерация и диссипация энергии турбулентности

Вследствие неразрывности потока, любое случайное смещение какой-либо части жидкости приводит к притоку на ее место соседних жидких объемов. Так возникают турбулентные вихри разных размеров. Самые крупные вихри имеют масштаб, соизмеримый с поперечным размером канала. Размер самых мелких вихрей ограничен силами внутреннего трения, препятствующими их вращению.

Встает естественный вопрос: что служит источником кинетической энергии турбулентных вихрей? Ответ оказывается однозначным: турбулентность потребляет энергию осредненного движения жидкости. Крупные турбулентные вихри забирают часть механической энергии потока и передают ее образующимся в них средним вихрям. Те отдают часть своей кинетической энергии более мелким вихрям. Таким образом, создается каскадная передача кинетической энергии к турбулентным образованиям наименьшего масштаба. Самые мелкие турбулентные вихри интенсивно уничтожаются молекулярной вязкостью, их энергия под действием сил внутреннего трения переходит в тепловую энергию хаотического движения молекул и рассеивается в окружающей жидкости. Процессы, вызывающие появление кинетической энергии турбулентности, называют ее **генерацией**, а процессы рассеивания энергии турбулентности при переходе ее в тепловую – **диссипацией**.

Кинетическая энергия турбулентности сосредоточена в основном в промежуточных турбулентных образованиях. В них

диссипация рассеивает лишь небольшую часть турбулентной энергии. Средний размер энергосодержащих турбулентных вихрей можно считать примерно равным **масштабу турбулентности**, который является одним из основных параметров турбулентного движения.

Кинетическая энергия турбулентности  $k_T$  относится к тем физическим величинам (или субстанциям), которые подчиняются закону сохранения. Поэтому для нее справедливо дифференциальное уравнение переноса, аналогичное уравнению (5.5):

$$\frac{\partial \rho u k_T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v k_T}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{эф}} \frac{\partial k_T}{\partial y} \right) = P_T - \varepsilon_T, \quad (5.6)$$

где  $P_T$  и  $\varepsilon_T$  – соответственно скорости генерации и диссипации кинетической энергии турбулентности, разность которых в уравнении рассматривается как источник энергии турбулентных пульсаций. Коэффициент эффективной вязкости  $\mu_{\text{эф}}$  находится здесь под знаком первой производной, что позволяет учитывать его изменение по толщине пограничного слоя.

#### § 4. Структура турбулентного пограничного слоя

Как известно (см. гл. 4, § 2), рядом с обтекаемой поверхностью образуется динамический пограничный слой. В нем продольная скорость  $u$  изменяется много быстрее по оси  $y$ , направленной поперек пограничного слоя, чем по оси  $x$  вдоль слоя.

Турбулентный пограничный слой, в отличие от ламинарного, имеет сложную структуру. Прежде всего, в турбулентном пограничном слое выделяют пристенную область, которая составляет не более 15 % от общей толщины пограничного слоя, и разделяют ее условно на три подслоя (рис. 5.2).

Непосредственно к обтекаемой поверхности, или стенке, прилегает тонкий **вязкий подслой** толщиной  $\delta_0$ , в котором молекулярная вязкость преобладает над турбулентной (т. е.  $\mu > \mu_T$ ). На некотором расстоянии от стенки образуется **равновесный подслой**, в котором скорости генерации  $P_T$  и диссипации  $\varepsilon_T$  энергии турбулентности примерно равны; здесь турбулентная вязкость в сотни раз превышает молекулярную. Между вязким и равновесным подслоями находится **переходный подслой**.

Несмотря на малую толщину, обычно составляющую доли миллиметра, влияние вязкого подслоя на движение жидкости чрезвычайно велико. Почти ламинарное течение в нем постоян-



но нарушается отдельными турбулентными вихрями, поступающими в подслой извне. Более того, сам вязкий подслой является источником турбулентности. Жидкость у поверхности стенки движется неравномерно, ее отдельные элементы тормозятся, как бы прилипая к стенке, затем отрываются от нее и выносятся за пределы вязкого подслоя, создавая пульсации скорости. В результате кинетическая энергия турбулентных пульсаций рядом с вязким подслоем оказывается больше, чем в других частях пограничного слоя.

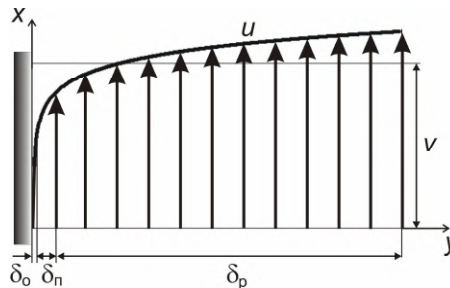


Рис. 5.2. Структура пристенной части турбулентного пограничного слоя:  $\delta_0$ ,  $\delta_n$ ,  $\delta_p$  – толщины вязкого, переходного и равновесного подслоев соответственно;  $u$  – скорость жидкости;  $v$  – средняя расходная скорость жидкости

В то же время, в самом вязком подслое резко возрастает диссипация кинетической энергии турбулентности, вторичные турбулентные образования подавляются, и взаимодействие турбулентных вихрей ослабевает. Близость поверхности стенки, таким образом, приглушает турбулентность в вязком подслое и рядом с ним – в переходном подслое.

## § 5. Полуэмпирическая гипотеза Прандтля

В пристенной области пограничного слоя справедлива гипотеза Прандтля, согласно которой турбулентные пульсации компонент скорости  $u'$  и  $v'$  по абсолютной величине пропорциональны градиенту продольной скорости. Это позволяет найти выражение для турбулентного напряжения силы внутреннего трения вблизи стенки, используя формулы (5.3):

$$\sigma_\tau = -\langle \rho u'v' \rangle = \rho \left( l \frac{du}{dy} \right)^2, \quad (5.7)$$

где  $l$  – длина пути смешения, которую можно рассматривать как масштаб пристенной турбулентности. Сопоставляя выражение (5.7) с формулой (5.4), находят выражение для турбулентной вязкости по гипотезе Прандтля:

$$\mu_T = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|. \quad (5.8)$$

Здесь используется абсолютная величина производной скорости, так как коэффициент вязкости  $\mu_T$  должен быть всегда положительным.

Обычно полагают, что в тонком слое жидкости у стенки результирующее касательное напряжение остается постоянным по толщине слоя и равным напряжению  $\sigma_{CT}$  на обтекаемой стенке. Его находят как сумму турбулентного (5.7) и молекулярного (3.3) напряжений силы внутреннего трения, которые считаются здесь положительными независимо от направления скорости:

$$\sigma_{CT} = \rho \left( l \frac{du}{dy} \right)^2 + \rho \nu \left| \frac{du}{dy} \right|.$$

где  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости.

Вместо касательного напряжения  $\sigma_{CT}$  применяют новую физическую величину  $u_*$ , которая имеет размерность скорости и поэтому называется **динамической скоростью**:

$$u_* \equiv \sqrt{\sigma_{CT} / \rho}.$$

Ее вводят в предыдущее равенство, которое в результате записывают в виде безразмерного квадратного уравнения:

$$l_+^2 \left( \frac{du_+}{dy_+} \right)^2 + \left| \frac{du_+}{dy_+} \right| - 1 = 0, \quad (5.9)$$

где безразмерные величины, обозначенные индексом "+", определяются следующими соотношениями:

$$u_+ \equiv u / u_*, \quad y_+ \equiv y u_* / \nu, \quad l_+ \equiv l u_* / \nu.$$

Решение квадратного уравнения дает следующее выражение для производной от безразмерной скорости:

$$\frac{du_+}{dy_+} = \frac{\sqrt{4l_+^2 + 1} - 1}{2l_+^2}, \quad (5.10)$$

а также, с учетом формулы (5.8), выражение для турбулентного аналога кинематического коэффициента вязкости:

$$\frac{\nu_\tau}{\nu} = \left( \sqrt{4l_+^2 + 1} - 1 \right) / 2. \quad (5.11)$$

Безразмерные формулы (5.10) и (5.11) оказываются полезными при расчете турбулентности в пристенной области, если известны динамическая скорость  $u_*$  и безразмерная длина пути смещения  $l_+$ . При численном решении задачи значения динамической скорости  $u_*$  находят методом последовательных приближений (итераций). Вопрос же расчета длины пути смещения требует дополнительного обсуждения.

## § 6. Логарифмическое распределение скорости

Прандтль предположил, что существует пропорциональность между длиной пути смещения  $l$  и расстоянием от обтекаемой поверхности по координате  $y$ ,

$$l_+ = \kappa y_+, \quad (5.12)$$

где  $\kappa$  – универсальная постоянная ( $\kappa \approx 0,41$ ).

Линейная зависимость (5.12) вполне справедлива только в равновесном подслое. В вязком и переходном подслоях, где на турбулентные пульсации влияет близость стенки, масштаб турбулентности заметно меньше предсказываемого формулой (5.12). Согласно Ван Драйсту, в эту формулу следует ввести экспоненциальный поправочный множитель, содержащий отношение расстояния  $y_+$  к параметру  $A$ :

$$l_+ = \kappa y_+ \left( 1 - e^{-y_+/A} \right), \quad (5.13)$$

Как оказалось, параметр  $A$  также изменяется по координате  $y_+$ :

$$A \approx 30 - y_+^2/120.$$

При квадратичном изменении параметра  $A$  экспоненциальная зависимость (5.13) плавно сопрягается с прямой (5.12) при  $y_+ = 60$ , а расчетная длина пути смещения  $l_+$  в вязком подслое и

переходной области становится меньше, чем по линейной зависимости Прандтля (рис. 5.3).

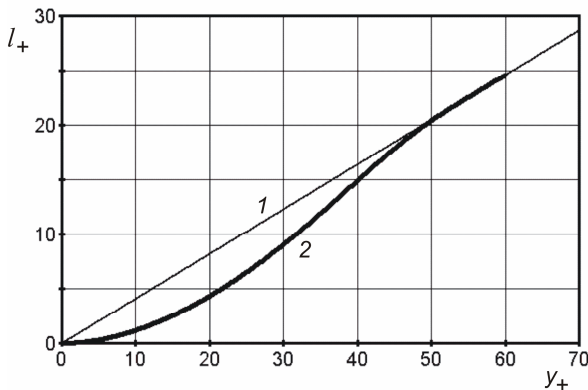


Рис. 5.3. Безразмерная зависимость длины пути смещения  $l_+$  от координаты  $y_+$  по закону:  
1 – линейному (5.12); 2 – экспоненциальному (5.13)

С помощью формулы (5.13) определена безразмерная толщина вязкого подслоя ( $\delta_{o+} \equiv \delta_o u_* / \nu = 11$ ), исходя из условия, что на его границе соотношение коэффициентов турбулентной и молекулярной вязкости  $\nu_t / \nu$  в уравнении (5.11) равно единице. Переходному подслою, где турбулентные пульсации приглушаются близостью стенки, соответствуют значения безразмерной координаты от  $y_+ = 11$  до  $y_+ = 60$ . При  $y_+ > 60$  располагается равновесный подслей (см. рис. 5.2).

Гипотеза турбулентности Прандтля позволяет определить профиль безразмерной продольной скорости в равновесном подслое. Подставляя линейную зависимость (5.12) в безразмерное равенство (5.10) и отбрасывая в нем единицы, получают приближенное дифференциальное уравнение

$$du_+ \approx \frac{1}{\kappa y_+} dy_+.$$

Интегрируя его, находят, что в равновесном подслое имеет место логарифмическое распределение скорости (см. рис. 5.2):

$$u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + C, \quad (5.14)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования ( $C = 5,32$  при обтекании гладкой стенки).

Как показали измерения, логарифмический закон распределения скорости приближенно распространяется также и на внешнюю область пограничного слоя в трубах на участке стабилизированного течения жидкости. Это позволило определить соотношение между максимальной скоростью на оси трубы  $u_{max}$  и средней расходной скоростью  $v$ . ***Средняя расходная скорость турбулентной жидкости при стабилизированном течении в трубе составляет около 85 % от максимальной на оси трубы*** (см. рис. 5.2):

$$v \approx 0,85 u_{max} . \quad (5.15)$$

Следует иметь в виду, что в вязком подслое и большей части переходного подслоя распределение скорости отличается от логарифмического, но это отклонение не оказывает заметного влияния на соотношение (5.15).

## § 7. Полуэмпирическая гипотеза Колмогорова

Колмогоров показал, что при развитом турбулентном движении турбулентный аналог кинематического коэффициента вязкости  $\nu_T$  можно считать пропорциональным квадратному корню из кинетической энергии турбулентности  $k_T$  и масштабу турбулентности  $l_T$  энергосодержащих вихрей:

$$\nu_T = C'_\mu k_T^{1/2} l_T ,$$

Позднее было установлено, что скорость диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon_T$  также зависит от кинетической энергии турбулентности  $k_T$  и обратно пропорциональна среднему размеру  $l_T$  энергосодержащих вихрей:

$$\varepsilon_T = C_\varepsilon k_T^{3/2} / l_T .$$

Здесь  $C'_\mu$  и  $C_\varepsilon$  – коэффициенты пропорциональности.

Объединяя две последние формулы, получают выражение, связывающее коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_T$  с локальными значениями кинетической энергии турбулентности  $k_T$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon_T$ :

$$\nu_T = C_\mu k_T^2 / \varepsilon_T, \quad (5.16)$$

где  $C_\mu$  – коэффициент пропорциональности ( $C_\mu = 0,09$ ).

Так как кинетическая энергия турбулентности  $k_T$  подчиняется закону сохранения, ее величина может быть найдена путем численного решения дифференциального уравнения переноса, например уравнения (5.6) в приближении пограничного слоя. Для скорости диссипации энергии турбулентности  $\varepsilon_T$  также составляют и решают численными методами дифференциальное уравнение переноса. В результате становится возможным определить коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_T$  по формуле (5.16) во всей области турбулентного движения жидкости.

### Вопросы для самопроверки

1. Как в турбулентном потоке возникают дополнительные напряжения внутреннего трения?
2. Что представляет собой каскадная передача кинетической энергии турбулентности в турбулентных вихрях?
3. Какова структура турбулентного пограничного слоя?
4. Каким образом гипотеза турбулентности Прандтля позволяет определить значения коэффициента турбулентной вязкости вблизи стенки?
5. Какой зависимости соответствует изменение продольной скорости турбулентного потока жидкости по радиусу трубы?
6. Каково соотношение средней и максимальной скорости при турбулентном движении жидкости в трубе?

## Глава 6. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

### § 1. Виды гидродинамических сопротивлений

Под действием внутреннего трения полное давление вязкой жидкости понижается в направлении ее течения или, как говорят, "теряется".

С физической точки зрения, потеря давления возникает вследствие частичного превращения механической энергии жидкости в тепловую энергию, которая бесполезно рассеивается в окружающей среде. Потерю полного давления (или напора) жидкости называют **гидродинамическим сопротивлением**, а применительно к газовым потокам – аэродинамическим сопротивлением.

Формула для расчета потери давления  $\Delta p$  может быть найдена, если воспользоваться определением числа Эйлера  $Eu$ ,

$$\Delta p = Eu \cdot \rho v^2.$$

Обычно число Эйлера заменяют безразмерным **коэффициентом сопротивления**  $\zeta \equiv 2Eu$ . Расчетной формуле при этом придают вид прямой пропорциональности между потерей давления  $\Delta p$  и динамическим давлением  $\rho v^2/2$ ,

$$\Delta p = \zeta \rho v^2 / 2, \quad (6.1)$$

где  $v$  – средняя расходная скорость потока жидкости.

При течении жидкости внутри труб и каналов гидродинамическое сопротивление вызывается двумя видами явлений: торможением слоев жидкости вследствие ее "прилипания" к обтекаемой поверхности (сопротивление трения) и образованием в потоке жидкости вихревых зон вследствие отрыва пограничного слоя от стенки, резкого изменения формы и направления потока (местное сопротивление). Часто полагают, что на отдельных участках коэффициент сопротивления  $\zeta$  равен сумме коэффициентов сопротивления трения  $\zeta_{тр}$  и местных сопротивлений  $\zeta_{м}$ :

$$\zeta = \zeta_{тр} + \sum \zeta_{м}.$$

Таким образом, для участка, где жидкость течет с одной и той же расчетной скоростью  $v$ , можно записать, что

$$\Delta p = (\zeta_{\text{тр}} + \Sigma \zeta_{\text{м}}) \frac{\rho v^2}{2}. \quad (6.2)$$

## § 2. Гидродинамическое сопротивление трения

Сопротивление трения прямо пропорционально длине расчетного участка канала  $l$ . Поэтому вместо коэффициента сопротивления трения применяют коэффициент гидравлического трения  $\lambda$ , не зависящий от  $l$ . Формуле (6.1) в этом случае придадут следующий вид:

$$\Delta p_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d_9} \frac{\rho v^2}{2}, \quad (6.3)$$

где  $d_9$  – эквивалентный диаметр расчетного участка канала.

**Коэффициент трения**  $\lambda$ , так же как и число Эйлера, изменяется в зависимости от определяющих чисел подобия, прежде всего, от числа Рейнольдса  $Re$ , и симплекса геометрического подобия, характеризующего шероховатость стенки:

$$\lambda = f \left( Re, \frac{\delta_{\text{ш}}}{d_9} \right),$$

где  $\delta_{\text{ш}}$  – средняя высота выступов шероховатости на стенках канала (абсолютная шероховатость). Отношение  $\delta_{\text{ш}}/d_9$  называют **относительной шероховатостью**.

На рис. 6.1 изображены кривые, построенные на основе экспериментального исследования сопротивления трения в трубах. При ламинарном режиме течения зависимость коэффициента гидравлического трения  $\lambda$  от числа Рейнольдса  $Re$  представляет собой гиперболу:

$$\lambda = 64/Re, \quad (6.4)$$

Сравнение с выражением (4.18) показывает, что точно такая же формула может быть получена теоретически. На рис. 6.1 ламинарному режиму соответствует область **I**.



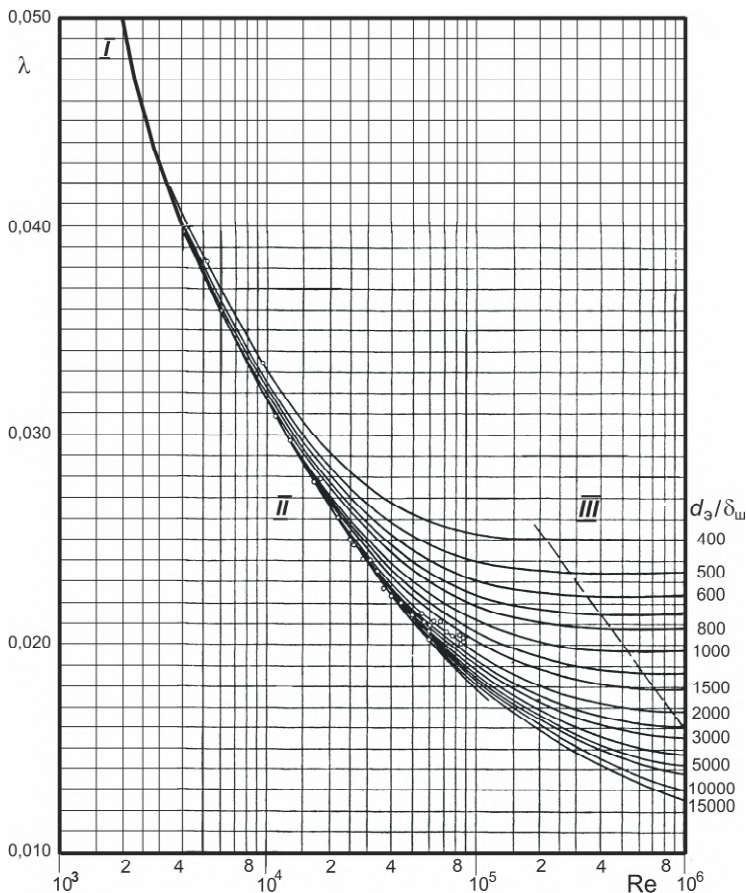


Рис. 6.1. Зависимость коэффициента трения  $\lambda$  труб от числа Рейнольдса и относительной шероховатости: *I* – область ламинарного течения; *II* и *III* – области турбулентного течения в гладких и шероховатых трубах

Для турбулентного течения в гладких трубах обычно применяется эмпирическая формула Блазиуса

$$\lambda = 0,316/\text{Re}^{0,25}, \quad (6.5)$$

в соответствии с которой построена кривая в области *II*.

Гидродинамическое сопротивление труб с шероховатыми стенками зависит от высоты выступов шероховатости. Коэффици-

коэффициент трения  $\lambda$  шероховатых труб представлен кривыми, расположенными в области **III** на рис. 6.1.

Экспериментальные данные для шероховатых труб обобщены формулой

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{68}{\text{Re}} + \frac{\delta_{\text{ш}}}{d_3} \right)^{0,25}, \quad (6.6)$$

согласно которой коэффициент трения  $\lambda$  уменьшается с увеличением числа Рейнольдса и возрастает при увеличении относительной шероховатости  $\delta_{\text{ш}}/d_3$ .

Если второе слагаемое формулы (6.6) много меньше первого ( $\delta_{\text{ш}}/d_3 \ll 68/\text{Re}$ ), то им можно пренебречь, и тогда расчетное уравнение практически совпадает с формулой Блазиуса (6.5) для гладких труб. При этом кривые для шероховатых труб из области **III** на рис. 6.1 сливаются с кривой для гладких труб (режим **гладкого трения**). Физически это объясняется тем, что выступы шероховатости не выходят за пределы вязкого подслоя и не влияют на движение жидкости в трубе ( $y_+ < 11$  на рис. 5.3).

Наоборот, если первое слагаемое в формуле (6.6) много меньше второго, то коэффициент трения  $\lambda$  в области **III** на рис. 6.1 не зависит от числа Re (автомоделен по числу Рейнольдса). На **автомодельном** режиме он возрастает с увеличением относительной шероховатости:

$$\lambda = 0,11 (\delta_{\text{ш}}/d_3)^{0,25}.$$

В этом случае выступы шероховатости выходят за пределы переходного подслоя ( $y_+ > 60$  на рис. 5.3).

На режиме **смешанного трения** коэффициент  $\lambda$  зависит, согласно формуле (6.6), как от числа Рейнольдса, так и от величины относительной шероховатости. В этом случае можно полагать, что высота выступов шероховатости находится в основном в пределах переходного подслоя (при  $11 < y_+ < 60$  на рис. 5.3).

Границы отмеченных режимов движения жидкости по трубопроводу не остаются неизменными. С увеличением скорости потока толщины вязкого и переходного подслоев уменьшаются и, в конце концов, становятся меньше средней высоты выступов шероховатости. В результате гладкое трение постепенно замещается закономерностями сопротивления шероховатых труб.

Следует также иметь в виду, что степенная зависимость (6.3) сопротивления трения от скорости не является строго квадратичной. Если в формулу (6.3) подставить выражение (6.4) или (6.5) для коэффициента трения, то показатель степени при средней расходной скорости  $v$  станет меньше двух. Для ламинарного течения эта зависимость превращается в линейную, совпадающую с теоретической (4.18).

### § 3. Местные гидродинамические сопротивления

Местные сопротивления рассчитывают по формуле

$$\Delta p_m = \sum \zeta_m \rho v^2 / 2 ,$$

причем коэффициенты местных сопротивлений  $\zeta_m$  обычно находят по справочным таблицам в зависимости от вида устройства, создающего сопротивление.

Характерным местным сопротивлением является **внезапное расширение**, вызванное резким увеличением поперечного сечения канала. При внезапном расширении (рис. 6.2, а) поток жидкости отрывается от стен узкой части канала, образуя струю, которая постепенно расширяется, пока не достигнет стенок широкой части канала. Между струей и стенкой образуется вихревая зона, в которой и сосредоточены в основном потери механической энергии.

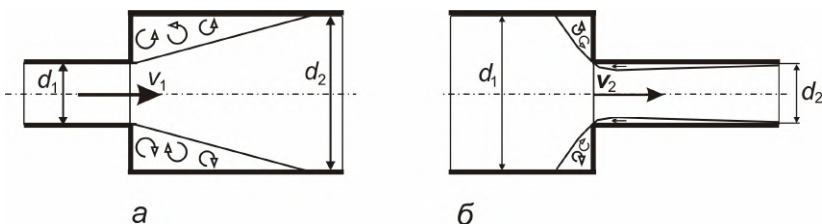


Рис. 6.2. Схема течения при внезапном расширении (а) и при внезапном сужении (б) канала

При **внезапном сужении** (рис. 6.2, б) поток на входе в участок трубы меньшего диаметра, наоборот, сначала сужается по инерции, а затем постепенно расширяется до стенок нового участка. Образующаяся при этом вихревая зона имеет меньший относительный объем, чем при внезапном расширении. Поэтому при одинаковом соотношении диаметров труб

гидродинамическое сопротивление внезапного сужения меньше, чем внезапного расширения.

Частным случаем внезапного расширения является выход из трубы в большое пространство. При этом вся кинетическая энергия потока теряется; она переходит в тепловую и бесполезно рассеивается (диссипирует). Поэтому обычно коэффициент сопротивления выхода равен единице ( $\zeta_{\text{вых}} = 1$ ). При входе жидкости в трубу из большого пространства коэффициент сопротивления всегда меньше ( $\zeta_{\text{вх}} < 1$ ).

Местные сопротивления возникают при **поворотах** потока в изгибах труб (рис. 6.3, а). При повороте потока у внешней части изгиба трубы скорость жидкости может уменьшаться, а ее давление возрастать. Создается зона обратного перепада давления, способная в пределе приводить к отрыву пограничного слоя. При этом у внутренней части изгиба трубы скорость жидкости увеличивается, так что поток замедляется лишь после поворота. Поэтому зона обратного перепада давления с возможным отрывом пограничного слоя формируется здесь уже после поворота.

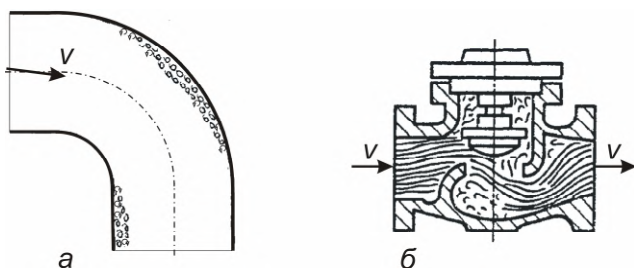


Рис. 6.3. Схема течения при повороте потока в изгибах труб (а) и в тарельчатом клапане (б)

Существует много других видов местных сопротивлений (в отводах, задвижках, измерительных устройствах и других элементах трубопровода, например, как на рис. 6.3, б). Хотя устройства, создающие сопротивление, как правило, занимают некоторый участок трубы, условно считается, что каждое местное сопротивление сосредоточено в одном расчетном сечении. Коэффициенты местных сопротивлений определены экспериментально и должны учитываться в инженерных расчетах.

#### § 4. Гидродинамические сопротивления при внешнем обтекании тел

При внешнем обтекании не удастся разделить расчет сопротивления трения на поверхности тела от расчета потери энергии на вихреобразование, вызванное формой тела. Расчет гидродинамического сопротивления ведется по формуле (6.1). Конкретный вид зависимости для коэффициента сопротивления  $\zeta$  находят экспериментально.

Очень часто внутри газопроводов размещают пучки труб, поперечно обтекаемые газовым потоком (рис. 6.4). Коэффициент сопротивления трубного пучка зависит от взаимного расположения труб (коридорное или шахматное), от расстояния между осями труб, которое задается поперечным  $s_1$  и продольным  $s_2$  шагами, от числа продольных рядов труб в пучке. Например, аэродинамическое сопротивление поперечно обтекаемых труб при их шахматном расположении рассчитывают по уравнению

$$\Delta p_{\text{тр}} = \zeta_0(n+1)\rho \frac{u_0^2}{2}, \quad (6.7)$$

где  $\zeta_0$  – коэффициент сопротивления одного поперечного ряда труб в пучке,  $n$  – число рядов труб по ходу газов,  $u_0$  – скорость газов в узком сечении пучка труб.

В свою очередь, коэффициент сопротивления одного ряда трубного пучка зависит от гидродинамических условий течения среды, то есть от числа Рейнольдса, и от расположения труб в пучке:

$$\zeta_0 = C_s \text{Re}^{-0,27}, \quad (6.8)$$

где  $C_s$  – численный коэффициент, учитывающий шаги труб в пучке ( $C_s \approx 3,2$ ). Число Рейнольдса здесь вычисляется по наружному диаметру трубы и скорости газов в зазорах между трубами:

$$\text{Re} = u_0 d_T / \nu.$$

При шахматном расположении труб образуется повышенное сопротивление выхода газов из пучка. Чтобы учесть его, к числу рядов  $n$  в формуле (6.7) добавлена единица.

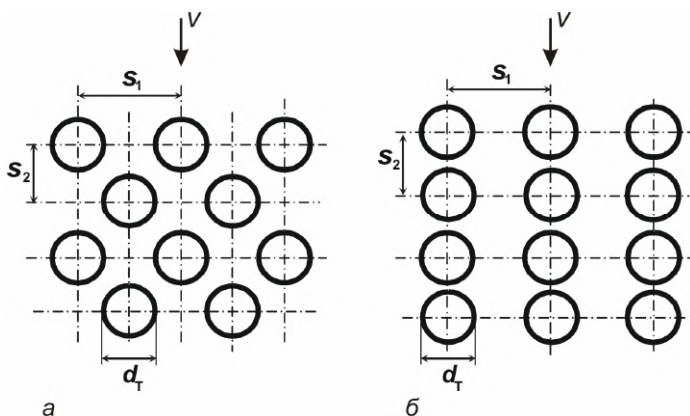


Рис. 6.4. Шахматное (а) и коридорное (б) расположение труб:  
 $d_t$  – наружный диаметр;  $s_1$  – поперечный шаг;  $s_2$  – продольный шаг труб;  
 $v$  – скорость жидкости

Другим видом устройств с внешним обтеканием является кирпичная насадка регенераторов в газоходах промышленных печей. Кирпичи в насадке располагают таким образом, чтобы между ними остались проходы для газов (рис. 6.5).

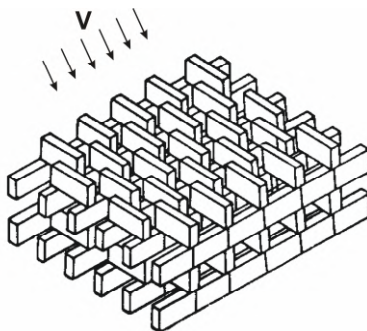


Рис. 6.5. Насадка регенератора со смещенными рядами кирпичей:  
 $v$  – скорость и направление движения газов

Для насадки с поперечно обтекаемыми рядами кирпичей коэффициент сопротивления рассчитывается по формулам, аналогичным (6.7) и (6.8), но с другими значениями числовых коэффициентов:

$$\Delta p_{\text{рег}} = \zeta_0 n \rho \frac{u^2}{2},$$

где  $\zeta_0$  – коэффициент сопротивления одного поперечного ряда кирпичей в насадке,  $n$  – число рядов кирпичей по ходу газов,  $u$  – скорость газов в поперечном сечении кирпичной насадки.

В регенераторах, так же как и в коридорных пучках труб, сопротивление выхода невелико и поэтому в расчетах не учитывается.

## § 5. Работа насоса в гидравлической сети

Гидравлическая сеть для перемещения жидкостей и газов представляет собой систему технологических аппаратов, соединенных между собой трубопроводами или газоходами. **Сопротивлением сети**  $\Delta p_{\text{сет}}$  называют величину механической энергии, которую нужно сообщить одному кубометру жидкости при ее установившемся перемещении в сети. Механическая энергия затрачивается при этом на подъем жидкости на геометрическую высоту  $H_r$ , на повышение давления от начального  $p_0$  до конечного  $p_3$  и, наконец, на преодоление суммарного гидродинамического сопротивления  $\Delta p_{\Sigma}$  трубопроводов и аппаратов (рис. 6.6):

$$\Delta p_{\text{сет}} = \rho g H_r + (p_3 - p_0) + \Delta p_{\Sigma}. \quad (6.9)$$

Первые два слагаемых в формуле (6.9) определяют постоянную часть сопротивления сети, соответствующую нулевому объемному расходу. Последнее слагаемое  $\Delta p_{\Sigma}$  возрастает в зависимости от скорости жидкости в степени, близкой к квадратичной. Поэтому сопротивление сети  $\Delta p_{\text{сет}}$  является также функцией объемного расхода жидкости  $V_{\text{ж}}$ :

$$\Delta p_{\text{сет}} = f(V_{\text{ж}}). \quad (6.10)$$

Чтобы преодолеть сопротивление сети, нужно предусмотреть установку насосов (или дымососов и вентиляторов), которые будут сообщать жидкости энергию, необходимую для перемещения ее в сети (см. рис. 6.6).

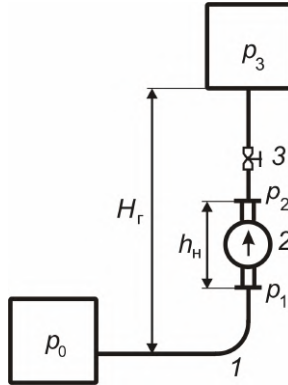


Рис. 6.6. Схема гидравлической сети:  
1 – трубопровод; 2 – насос; 3 – вентиль

Графическую зависимость (6.10) сопротивления сети от объемного расхода жидкости называют **характеристикой сети** (рис. 6.7).

**Давлением насоса**  $p_n$  называется разность полных давлений жидкости в нагнетательном и всасывающем патрубках насоса:

$$p_n = p_2^{\text{полн}} - p_1^{\text{полн}} = p_2 - p_1 + \rho(v_2^2 - v_1^2)/2 + \rho g h_n, \quad (6.11)$$

где  $h_n$  – расстояние по высоте между входом и выходом жидкости в патрубках насоса,  $p_1$ ,  $p_2$  и  $v_1$ ,  $v_2$  – соответствующие значения статического давления и скорости в нагнетательном и всасывающем патрубках насоса.

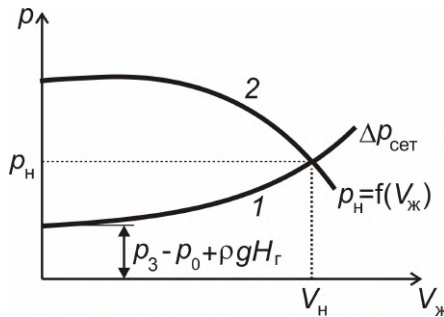


Рис. 6.7. Характеристики сети (1) и центробежного насоса (2):  
 $p_n$  – рабочее давление насоса,  $V_n$  – подача насоса на рабочем режиме



Графическая зависимость давления насоса  $p_n$  от объемного расхода жидкости  $V_{ж}$  (подачи насоса) называется **характеристикой насоса**. Широко применяемые центробежные насосы имеют падающую характеристику, то есть с увеличением подачи насоса создаваемое им давление снижается (см. рис. 6.7).

Характеристики насоса и сети пересекаются в точке, называемой **рабочей точкой**. Ей соответствует давление  $p_n$  и подача насоса  $V_n$  на установившемся рабочем режиме.

По своему физическому содержанию давление насоса равно механической энергии, сообщаемой им одному кубометру жидкости. Энергия, которую получает за единицу времени вся жидкость, прошедшая через насос, представляет собой полезную мощность  $N$  насоса:

$$N = p_n V_n .$$

С учетом к.п.д. насоса  $\eta_n$  получают формулу для мощности, потребляемой насосом в рабочем режиме,

$$N_n = p_n V_n / \eta_n . \quad (6.12)$$

Чтобы уменьшить расход энергии на перемещение жидкости, рабочую точку на характеристике сети выбирают там, где к.п.д. насоса близок к своему максимальному значению.

### Вопросы для самопроверки

1. Можно ли коэффициент сопротивления трения рассматривать как число подобия?
2. Чем отличается коэффициент трения от коэффициента сопротивления трения?
3. При каком условии можно складывать коэффициенты сопротивления трения с местными коэффициентами?
4. При каких условиях течения жидкости сопротивление трения пропорционально ее скорости в первой степени и при каких – квадрату скорости?
5. Какова роль рабочей точки при работе насоса в гидравлической сети?

## Глава 7. ДВУХФАЗНЫЕ ПОТОКИ И СИСТЕМЫ

### § 1. Особенности гидродинамики двухфазных систем

Кроме течений однородных однофазных жидкостей в гидрогазодинамике изучается движение двухфазных и многофазных систем. Основной особенностью таких систем является наличие дополнительной границы, разделяющей разные фазы, то есть области потока с резко различными физическими свойствами или вещества в разных агрегатных состояниях.

В двухфазных потоках одна из фаз обычно является **сплошной** (дисперсионной), а вторая – разделенной на мелкие части (**дисперсной**). В природе довольно широко распространены относительно устойчивые двухфазные системы: эмульсия, суспензия, туман, пыль – это жидкие и твердые частицы, распределенные в жидкой или газообразной среде. Газ, распределенный в жидкости, образует пену.

В технике, как правило, двухфазные системы являются динамическими, существующими только благодаря движению сплошной среды, причем характеристики течения каждой фазы во многих случаях зависят от условий движения другой фазы. Взаимное движение обеих фаз в потоке может быть различным – прямоточным, если направлено в одну сторону, и противоточным, если фазы движутся в противоположных направлениях. Существует и более сложное взаимное движение фаз.

Двухфазные системы часто разделяют на два вида – системы с твердой дисперсной фазой, не изменяющей своих размеров и формы, и системы с жидкой или газообразной дисперсной фазой, частицы которой (пузыри, капли, пленки), как правило, изменяют при движении свою форму из-за подвижности границы раздела фаз, слияния или дробления отдельных пузырей и капель. Первый вид двухфазных систем, с физической точки зрения, проще и поэтому изучен в большей мере, чем второй.

### § 2. Свободное осаждение шарообразной частицы

На твердую частицу, диаметр которой  $d_t$  и объем  $V_t = \pi d_t^3 / 6$ , в жидкости действуют две противоположно направленные силы (рис. 7.1, а). Первая из них – сила земного тяготения, вызывающая осаждение частицы, частично уравновешена выталкивающей силой, равной весу жидкости в объеме частицы. В результате сила, движущая шарообразную частицу вниз, равна

$$f_1 = (\rho_T - \rho) g \cdot \pi d_T^3 / 6, \quad (7.1)$$

где  $\rho_T$  – плотность твердой частицы,  $\rho$  – плотность жидкости, в которой частица осаждается,  $g$  – ускорение свободного падения.

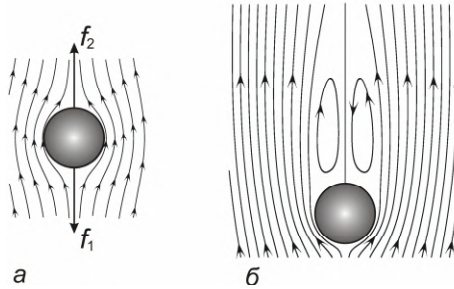


Рис. 7.1. Обтекание жидкостью осаждающейся шарообразной частицы: а – без отрыва пограничного слоя, б – с отрывом пограничного слоя за частицей

Второй является сила гидродинамического сопротивления, возникающая при обтекании твердой частицы жидкостью. Она равна потере давления  $\Delta p$ , помноженной на площадь максимального поперечного сечения частицы:

$$f_2 = \Delta p \cdot \pi d_T^2 / 4.$$

Если учесть, что потеря давления определяется формулой (6.1), то сила гидродинамического сопротивления равна

$$f_2 = \zeta \rho \frac{v^2}{2} \cdot \pi \frac{d_T^2}{4}, \quad (7.2)$$

где  $\zeta$  – коэффициент сопротивления одиночной твердой частицы, величина которого найдена экспериментально в зависимости от числа Рейнольдса (рис. 7.2),  $v$  – скорость движения частицы относительно среды.

Свободным осаждением частицы называют ее равномерное движение, возникающее при условии, что силы, действующие на нее, уравновешены (т.е.  $f_1 = f_2$ ). Приравняв правые части формул (7.1) и (7.2), получают выражение, с помощью которого можно вычислить скорость свободного осаждения  $v_{oc}$  твердой частицы:

$$\zeta \rho v_{oc}^2 \cdot \pi d_T^2 / 8 = (\rho_T - \rho) g \cdot \pi d_T^3 / 6.$$

Это выражение приводят к безразмерному виду, поделив обе его части на плотность  $\rho$  и на квадрат кинематического коэффициента вязкости  $\nu^2$  жидкости:

$$\zeta \frac{v_{oc}^2 d_T^2}{\nu^2} = \frac{4}{3} \frac{d_T^3 g}{\nu^2} \frac{\rho_T - \rho}{\rho}.$$

Затем записывают его в виде обобщенной зависимости между числами подобия:

$$\zeta Re_{oc}^2 = \frac{4}{3} Ar, \quad (7.3)$$

где число Рейнольдса определено по диаметру частицы и скорости ее свободного осаждения:

$$Re_{oc} = v_{oc} d_T / \nu, \quad (7.4)$$

а число Архимеда учитывает соотношение плотностей твердой и жидкой фазы:

$$Ar = \frac{d_T^3 g}{\nu^2} \frac{\rho_T - \rho}{\rho}.$$

Условия обтекания шарообразной частицы зависят от числа  $Re_{oc}$ . При очень малом числе Рейнольдса ( $Re_{oc} < 1$ ) жидкость обтекает ее плавно, не отрываясь от поверхности частицы (см. рис. 7.1, а); коэффициент сопротивления  $\zeta$  обратно пропорционален числу Рейнольдса (см. рис. 7.2, область *I*):

$$\zeta = 24 / Re_{oc}. \quad (7.5)$$

При дальнейшем повышении числа Рейнольдса пограничный слой отрывается (рис. 7.1, б), и за частицей образуются ламинарные вихри; зависимость коэффициента  $\zeta$  становится более сложной (см. рис. 7.2, область *II*). В области *III* ламинарные кормовые вихри становятся турбулентными; коэффициент сопротивления  $\zeta$  близок к постоянному значению  $\zeta \approx 0,44$ . Наконец, при очень высоких значениях  $Re_{oc}$  пограничный слой на поверхности частицы также становится турбулентным, точка его отрыва смещается по направлению течения, объем вихревой зоны уменьшается, и коэффициент сопротивления резко снижается (см. рис. 7.2, область *IV*).

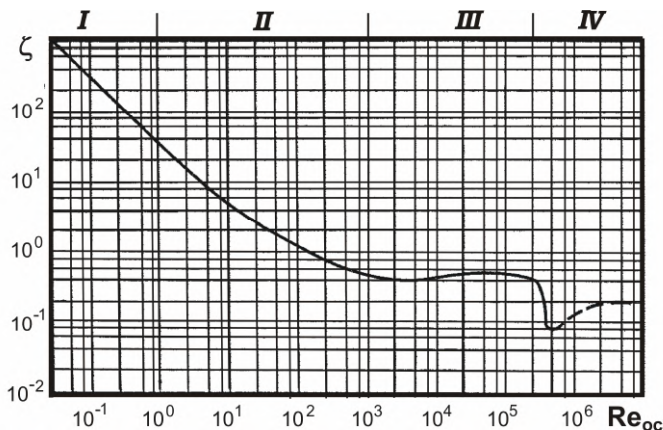


Рис. 7.2. Зависимость коэффициента сопротивления  $\zeta$  сферической частицы от числа Рейнольдса в логарифмических координатах:

*I* – обтекание без отрыва пограничного слоя, *II, III, IV* – обтекание частицы с отрывом пограничного слоя

Несмотря на свою простоту, соотношение (7.3) все же оказывается недостаточно удобным для вычисления скорости осаждения твердой частицы из-за наличия в нем переменного коэффициента сопротивления  $\zeta$ . Чаще применяется интерполяционная формула, охватывающая первые три области гидродинамического сопротивления:

$$\text{Re}_{\text{oc}} = \frac{\text{Ar}}{18 + 0,6\sqrt{\text{Ar}}} . \quad (7.6)$$

Мелкие частицы характеризуются небольшими значениями числа Архимеда ( $\text{Ar} \ll 1$ ). В этом случае второе слагаемое в знаменателе формулы (7.6) оказывается настолько малым по сравнению с первым, что им можно пренебречь. Итогом будет обратная пропорциональность (7.5) коэффициента сопротивления числу Рейнольдса на ламинарном режиме. Наоборот, для сравнительно крупных и тяжелых частиц при большом числе Архимеда ( $\text{Ar} \approx 10^6$ ) можно пренебречь первым слагаемым в знаменателе формулы (7.6). Результат будет соответствовать постоянной величине коэффициента сопротивления. Для средних частиц формула (7.6) учитывает оба слагаемых в знаменателе и, следовательно, промежуточные режимы гидродинамического сопротивления.

Рассчитав  $Re_{oc}$  по формуле (7.6), будет нетрудно найти скорость  $v_{oc}$  осаждающейся частицы, воспользовавшись определением числа Рейнольдса (7.4).

Если при осаждении твердой частицы со скоростью  $v_{oc}$  жидкость движется вверх с той же скоростью, то создается впечатление, что эта частица зависает на некотором уровне, или, как говорят, витает. Скорость направленного вверх потока жидкости, равную скорости свободного осаждения твердой шарообразной частицы, называют **скоростью витания**:  $v_{вит} = v_{oc}$ . Очевидно, что скорость витания  $v_{вит}$  может быть вычислена, так же как и скорость свободного осаждения частиц  $v_{oc}$ , по уравнению (7.6) и числу Рейнольдса (7.4).

### § 3. Псевдооживление

В технических устройствах часто жидкость или газ протекают через слой зернистого материала в зазорах между твердыми частицами. При направлении потока вверх зернистый слой может находиться в одном из двух состояний – неподвижном при плотном размещении частиц и взвешенном, при котором частицы отделены друг от друга и находятся в состоянии коллективного витания (рис. 7.3).

Во взвешенном состоянии зернистый слой по своим свойствам напоминает жидкость: он приобретает текучесть, способность заполнять ёмкости любой формы. Твердые частицы, интенсивно перемещающиеся в различных направлениях в потоке сплошной среды, сталкиваются друг с другом и обмениваются количеством движения, что придает дисперсной фазе свойство, похожее на вязкость. Такое состояние взвешенного слоя называют **псевдооживленным**.

В зависимости от того, какая среда используется для псевдооживления, различают две разновидности псевдооживленного состояния. Если сплошной средой служит капельная жидкость, то происходит однородное псевдооживление с относительно равномерным распределением твердой фазы по объему слоя (рис. 7.3, а). Если же сплошная среда является газообразной, то псевдооживление становится неоднородным: часть газа движется через слой не сплошным потоком, а в виде пузырей, поверхность которых покрыта частицами дисперсной фазы. Достигнув поверхности слоя, газовые пузыри разрушаются, выбрасывая вверх твердые частицы (рис. 7.3, б). Неоднородный псевдоожив-

женный слой напоминает кипящую жидкость и поэтому часто называется **кипящим слоем**.

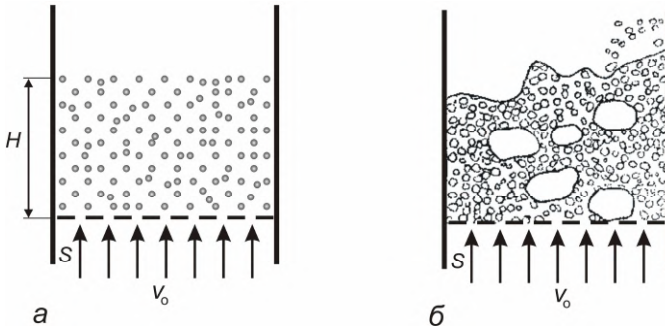


Рис. 7.3. Псевдооживленные зернистые слои:  
а – однородный; б – "кипящий"

Если  $S$  – площадь полного поперечного сечения слоя и  $H$  – его высота, то объем слоя равен  $V_{\text{сл}} = SH$ . Он состоит из двух частей: объема твердой дисперсной фазы  $V_T$  и свободного объема  $V_{\text{св}}$ , то есть объема свободного пространства между частицами. Доля свободного объема  $V_{\text{св}}$  в объеме, занятом слоем, называется **порозностью**  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon \equiv V_{\text{св}}/V_{\text{сл}}.$$

Порозность неподвижного слоя  $\varepsilon$  обычно имеет значения в пределах от 0,35 до 0,45 и в среднем может быть принята  $\varepsilon_{\text{н}} \approx 0,4$ . Порозность псевдооживленного слоя лежит в интервале от 0,4 до 1, причем единица является предельным, практически недостижимым значением.

Если объем твердой фазы в слое принять постоянным и выразить его с помощью порозности,

$$V_T = V_{\text{сл}}(1 - \varepsilon) = SH(1 - \varepsilon) = \text{const}, \quad (7.7)$$

то можно показать, что при переходе в псевдооживленное состояние высота слоя  $H$  увеличивается по сравнению с высотой  $H_{\text{н}}$  неподвижного слоя:

$$H = H_{\text{н}} \frac{1 - \varepsilon_{\text{н}}}{1 - \varepsilon}. \quad (7.8)$$

Из формулы (7.8) следует, что чем больше порозность  $\varepsilon$  псевдоожигенного слоя при том же объеме твердой фазы, тем больше и его высота  $H$ .

Действительная скорость жидкости в зазорах между твердыми частицами, хотя и обеспечивает их взвешенное состояние, но постоянно колеблется и не может быть точно рассчитана. Поэтому целесообразно выразить ее через скорость, условно отнесенную к полному поперечному сечению слоя  $S$ . Эту скорость называют **фиктивной скоростью**  $v_o$ :

$$v_o \equiv G/\rho S, \quad (7.9)$$

где  $G$  – массовый расход сплошной среды,  $\rho$  – ее плотность.

Считая среднюю длину каналов между частицами приблизительно равной высоте  $H$  слоя, находят площадь суммарного свободного поперечного сечения каналов:

$$S_{св} \approx V_{св}/H = HS\varepsilon/H = S\varepsilon.$$

В итоге действительную скорость жидкости можно оценить с помощью следующего соотношения, аналогичного уравнению расхода (1.2) :

$$v = G/\rho S_{св} \approx G/\rho S\varepsilon. \quad (7.10)$$

Сравнивая формулы (7.9) и (7.10), получают приближенное соотношение между действительной и фиктивной скоростями сплошной среды:

$$v \approx v_o/\varepsilon. \quad (7.11)$$

#### § 4. Гидродинамика псевдоожигенного слоя

Условием, обеспечивающим взвешенное состояние твердой фазы в псевдоожигенном слое, является равенство силы гидродинамического сопротивления слоя и веса всех его твердых частиц за вычетом выталкивающей силы:

$$\Delta\rho_{пс} S = (\rho_T - \rho) g V_T,$$

где  $V_T$  – объем твердой фазы,  $S$  – полная площадь поперечного сечения слоя,  $\rho_T$  – плотность твердых частиц,  $\rho$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения.



Из этого условия, с учетом равенства (7.7), получают формулу для расчета гидродинамического сопротивления псевдоожигенного слоя:

$$\Delta p_{\text{пс}} = (\rho_{\text{т}} - \rho) g H (1 - \varepsilon). \quad (7.12)$$

График изменения гидродинамического сопротивления зернистого слоя представлен на рис. 7.4 в виде зависимости потери давления  $\Delta p_{\text{пс}}$  от фиктивной скорости газа  $v_0$ . Этот график имеет две принципиально разные области. Первая из них относится к неподвижному зернистому слою, перепад давления в котором возрастает при увеличении фиктивной скорости вплоть до **скорости псевдоожигения**  $v_{\text{пс}}$ . В этой точке неподвижный зернистый слой начинает переходить в псевдоожигенное состояние под воздействием увеличившейся силы гидродинамического сопротивления.

Во второй области при увеличении фиктивной скорости  $v_0$  сопротивление зернистого слоя в состоянии псевдоожигения остается приблизительно постоянным в соответствии с формулой (7.12) до тех пор, пока скорость потока не достигнет скорости уноса  $v_{\text{ун}}$ , равной скорости витания  $v_{\text{вит}}$ . Так как при этом порозность слоя приближается к единице, то зернистый слой практически разделяется на отдельные частицы, уносимые потоком жидкости или газа.

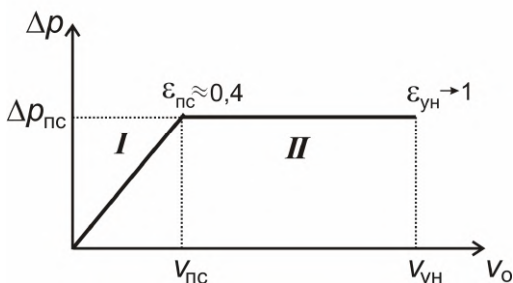


Рис. 7.4. Гидродинамическое сопротивление  $\Delta p$  зернистого слоя:

*I* — неподвижного; *II* — псевдоожигенного

Твердые частицы в псевдоожигенном слое находятся в состоянии коллективного **стесненного витания**. Для расчета параметров псевдоожигения для частиц округлой формы, близкой к шарообразной, подобрана формула, распространяющая

выражение для скорости свободного осаждения (7.6) на случай стесненного витания частиц,

$$Re_o = \frac{Ar \cdot \varepsilon^{4,75}}{18 + 0,6\sqrt{Ar \cdot \varepsilon^{4,75}}} . \quad (7.13)$$

Здесь число Рейнольдса  $Re_o$  определено по среднему диаметру частиц и фиктивной скорости:

$$Re_o = v_o d_T / \nu , \quad (7.14)$$

С помощью формулы (7.13) можно для определенного режима псевдооживления при известном числе Архимеда и заданной порозности  $\varepsilon$  определить число Рейнольдса  $Re_o$  и затем, с его помощью, фиктивную скорость  $v_o$  по формуле (7.14) и массовый расход жидкости  $G$  по уравнению типа (7.9).

Таким образом, пределы существования псевдооживленного слоя ограничены снизу скоростью псевдооживления  $v_{nc}$  (при  $\varepsilon \approx 0,4$ ) и сверху – скоростью уноса  $v_{yn}$  (при  $\varepsilon \approx 1$ ).

## § 5. Гидро- и пневмотранспорт

При скорости сплошной фазы  $v_o$ , превышающей скорость витания  $v_{вит}$ , или уноса  $v_{yn}$ , по меньшей мере в 1,2 раза, существует режим массового перемещения твердых частиц потоком жидкости или газа. Его называют гидро- или пневмотранспортом и используют в промышленности для транспортировки зернистых материалов. Концентрация дисперсной фазы в транспортирующем потоке может изменяться от низкой при  $\varepsilon \approx 0,95$  до достаточно высокой при  $\varepsilon \approx 0,75$ .

Правильный выбор скорости транспортирующего потока является важной задачей. Недостаточное превышение скорости потока над скоростью витания может нарушать устойчивое перемещение твердых частиц. Излишне большая скорость газового потока экономически нецелесообразна.

Так как твердые частицы в направленном вверх потоке жидкости или газа находятся в состоянии стесненного витания относительно потока, то для расчета параметров транспортируемого материала применима слегка измененная формула (7.13):

$$\text{Re}_{\text{отн}} = \frac{\text{Ar} \cdot \varepsilon^{4,75}}{18 + 0,6\sqrt{\text{Ar} \cdot \varepsilon^{4,75}}} . \quad (7.15)$$

Здесь число Рейнольдса определено по среднему диаметру частиц и по относительной скорости движения жидкости или газа  $v_o^{\text{отн}}$  (относительно взвешенных в ней частиц), приведенной к полному поперечному сечению канала:

$$\text{Re}_{\text{отн}} = \frac{v_o^{\text{отн}} d_T}{\nu} . \quad (7.16)$$

**Относительная скорость** жидкости или газа равна разности  $(v - u_T)$  между действительной скоростью  $v$  сплошной фазы и скоростью  $u_T$  транспортирования твердого материала. Из соотношения (7.11) между действительной и фиктивной скоростями следует, что

$$v_o^{\text{отн}} \approx (v - u_T) \varepsilon = (v_o / \varepsilon - u_T) \varepsilon = v_o - \varepsilon u_T . \quad (7.17)$$

С помощью формулы (7.15) при известном числе Архимеда твердого материала и заданной порозности  $\varepsilon$  можно определить число Рейнольдса  $\text{Re}_{\text{отн}}$  и с его помощью по формулам (7.16) и (7.17) – фиктивную скорость  $v_o$  для заданной скорости  $u_T$  вертикального транспортирования, и, наконец, по (7.9) – массовый расход транспортирующего агента  $G$ .

Скорость жидкости или газа при устойчивом транспортировании дисперсного материала по горизонтальным трубопроводам должна быть выше, чем по вертикальным, чтобы предотвратить расслоение по крупности и осаждение твердых частиц.

Сопротивление гидро- или пневмотранспорта, так же как и сопротивление сети в уравнении (6.9), складывается из затраты давления на подъем твердого материала на геометрическую высоту  $H_T$  и на преодоление суммарного гидродинамического сопротивления  $\Delta p_{\Sigma}$  трубопроводов

$$\Delta p_{\text{тран}} = \rho_T g H_T + \Delta p_{\Sigma} .$$

При расчете гидродинамического сопротивления двухфазной системы учитывают не только сопротивление при движении сплошной фазы, но и появление дополнительной силы трения между твердой фазой и жидкостью, а также прямую потерю механической энергии при ударе твердых частиц о стенки канала.

С этой целью соответственно увеличивают коэффициент трения  $\lambda$  в формуле (6.3).

## § 6. Двухфазные системы "жидкость–газ"

Часто в промышленных установках образуются и перемещаются двухфазные структуры, состоящие из смеси капельной жидкости с газами или паром. Гидродинамический процесс, в котором газ поднимается в жидкости в виде пузырей, называют **барботажем**.

Структура системы "жидкость – газ" определяется **газосодержанием**  $\phi$ , то есть долей объема, занимаемого газовой фазой в общем объеме газожидкостной смеси. При относительно небольшом газосодержании газ поднимается в жидкости в виде отдельных свободно всплывающих пузырей. Повышение газосодержания приводит к образованию динамической пены.

Пусть газ подают в жидкость через отверстие диаметром  $d_0$  (рис. 7.5). Диаметр  $d_r$  образующегося у отверстия газового пузырька постепенно увеличивается, пока подъемная (архимедова) сила  $f_1$ , действующая на объем пузырька  $V_r = \pi d_r^3 / 6$ , не станет равной силе поверхностного натяжения  $f_2$ , действующей по окружности отверстия длиной  $\pi d_0$  и препятствующей отрыву пузырька:

$$(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}}) g \cdot \frac{\pi}{6} d_r^3 = \sigma_{\text{ж}} \cdot \pi d_0.$$

Здесь  $\rho_{\text{ж}}$ ,  $\rho_{\text{г}}$  – соответственно плотность жидкости и газа,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\sigma_{\text{ж}}$  – поверхностное натяжение капельной жидкости.

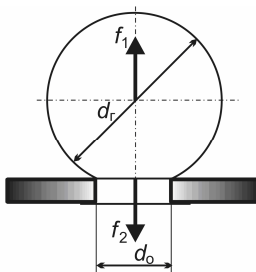


Рис. 7.5. Условия отрыва пузырька газа:  
 $f_1$  – подъемная сила,  $f_2$  – сила поверхностного натяжения,  
 $d_r$  – диаметр газового пузырька,  $d_0$  – диаметр отверстия

Из этого равенства следует выражение для диаметра пузырька в момент его отрыва:

$$d_r = 3 \sqrt{\frac{6d_o\sigma_{\text{ж}}}{(\rho_{\text{ж}} - \rho_r)g}}. \quad (7.18)$$

Формула (7.18) показывает, что диаметр образующегося пузырька не зависит от расхода газа, а определяется диаметром отверстия и физическими свойствами жидкости. С увеличением расхода газа возрастает лишь частота отрыва пузырьков.

Когда расход газа достигает критического значения, образующиеся пузырьки движутся в виде цепочки, соприкасаясь друг с другом. При дальнейшем увеличении расхода газа из отверстия вытекает газовая струйка, рассыпающаяся на множество пузырьков в объеме жидкости.

Скорость подъема пузырьков газа находится из условия равенства подъемной силы и силы сопротивления среды. Мелкие пузырьки ( $d_r < 1,5$  мм) под действием поверхностного натяжения сохраняют форму, близкую к шарообразной. Их скорость подъема линейно возрастает с увеличением диаметра (рис. 7.6).

При барботаже в промышленных установках газ вытекает одновременно из многих отверстий, так что пузырьки всплывают стесненно и могут сливаться друг с другом. С увеличением размера пузырька он деформируется из-за неравномерности давления по окружности, приобретая неустойчивую форму: сначала эллипсоидальную (при  $d_r < 5$  мм), а затем грибообразную. Как показывают опыты, скорость подъема крупных пузырьков газа слабо зависит от их размера (см. рис. 7.6).

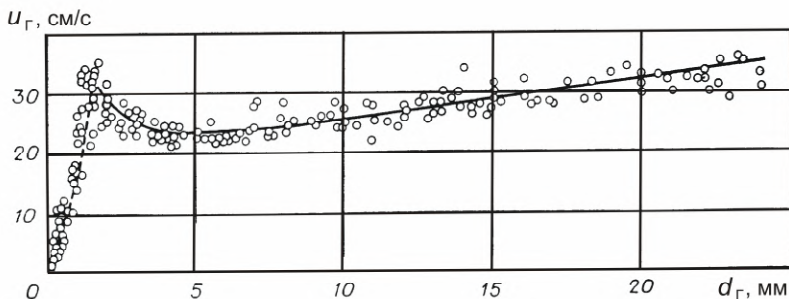


Рис. 7.6. Скорость подъема пузырьков разных эквивалентных диаметров

Гидродинамическое сопротивление при движении газожидкостной смеси в трубах зависит не только от скорости потока, но и от его газосодержания  $\varphi$ . Примером может служить течение в гладких трубах жидкости, содержащей сравнительно небольшое количество мелких пузырьков газа (рис. 7.7).

В области *I* ламинарного течения жидкости газосодержание приводит к значительному увеличению коэффициента трения  $\lambda$ , в то время как в области *II* турбулентного движения влияние газа при небольших его концентрациях практически не сказывается на общем гидродинамическом сопротивлении.

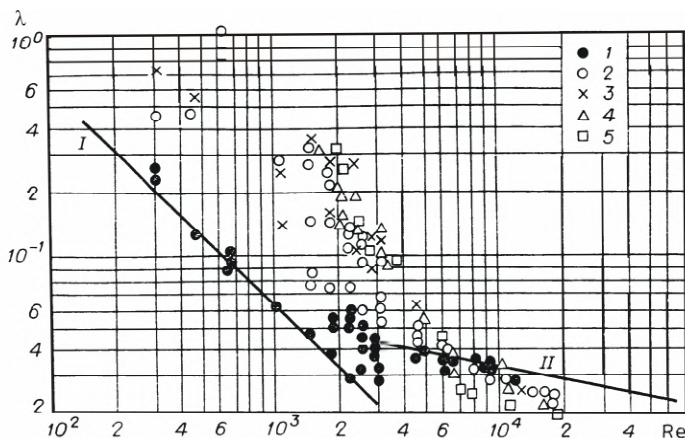


Рис. 7.7. Коэффициент трения  $\lambda$  для потока жидкости в вертикальной трубе при различном газосодержании:

1 –  $\varphi=0$ , 2 –  $\varphi=0,005$ , 3 –  $\varphi=0,025$ , 4 –  $\varphi=0,045$ , 5 –  $\varphi=0,07$ ;  
*I, II* – области ламинарного и турбулентного режимов течения

Характерные гидродинамические режимы движения парожидкостной системы наблюдаются в вертикальных трубах паровых котлов. Так как пар непрерывно образуется на обогреваемой стенке трубы, то газосодержание пароводяной смеси постоянно растет по высоте трубы. По мере увеличения газосодержания мелкие пузырьки пара сливаются вместе, образуя на оси трубы крупные пузыри, по форме напоминающие снаряды. Затем крупные пузыри сливаются в единый поток пара, придавая капельной жидкости форму кольцевой пленки, движущейся по стенке трубы.

При большом газосодержании возможна инверсия структуры двухфазной системы: паровая фаза становится сплошной, а жидкая фаза превращается в дисперсную. Парожидкостный поток принимает вид сплошной паровой среды, содержащей взвешенные в ней жидкие капли.

### **Вопросы для самопроверки**

1. В чем состоит основное отличие двухфазных систем от однофазных?
2. Чем свободное вращение твердых частиц отличается от их стесненного вращающего или осаждения?
3. Почему для псевдооживленного слоя действительную скорость жидкости заменяют фиктивной?
4. Почему гидродинамическое сопротивление кипящего слоя практически не зависит от фиктивной скорости?
5. Как рассчитать порозность слоя на рабочем режиме псевдооживления?
6. При какой скорости потока возможна устойчивая работа гидротранспорта или пневмотранспорта?

## Глава 8. ТУРБУЛЕНТНОЕ СТРУЙНОЕ ТЕЧЕНИЕ

### § 1. Основные свойства турбулентных струй

Жидкость или газ, вытекающие из сопла или патрубка в более широкое пространство, вовлекают в свое движение окружающую среду, образуя **струйное течение**. Когда струя распространяется в неподвижной среде в неограниченном пространстве, она называется свободной. Различают также струи, развивающиеся в спутном и встречном потоках. Большое влияние на течение струи оказывает форма ее поперечного сечения – плоская или круглая.

Знание закономерностей струйных процессов имеет большое прикладное значение для организации сжигания топлива в турбулентном факеле.

Имеется несколько общих особенностей струйного течения независимо от условий образования струй. Непосредственно после выхода (истечения) жидкости из сопла образуется **начальный** участок струи, на котором заметно проявляется влияние формы и размеров выходного отверстия сопла. Далее после небольшого переходного участка располагается **основной** участок струи, где течение жидкости уже не зависит от того, какую форму имеет сопло квадратную, например, или круглую (рис. 8.1). Для струй с круглым поперечным сечением длина начального участка составляет до пяти диаметров отверстия сопла ( $x_n < 5d_0$ ).

На начальном участке под воздействием окружающей среды происходит активное изменение профиля скорости во внешних слоях струи; в то же время скорость приосевого ядра потока сохраняется равной скорости истечения  $u_0$  (см. рис. 8.1). На основном же участке скорость на оси  $u_m$  снижается по длине струи таким образом, что наблюдается подобие профиля скоростей в различных ее поперечных сечениях.

Обычно область струйного течения условно отделяют от окружающей среды поверхностью, называемой границей струи. Осесимметричные турбулентные струи с круглым поперечным сечением имеют на основном участке коническую границу с прямыми образующими линиями на расстоянии  $R$  от оси (см. рис. 8.1). Эта поверхность неустойчива, на ней образуются турбулентные вихри, вовлекающие окружающие слои в струйное движение. В результате струя постепенно расширяется в направлении своего движения, ее масса увеличи-



вается, а скорость  $u$  убывает. Центральный угол раскрытия свободной осесимметричной турбулентной струи составляет около  $25^\circ$ . Давление по ее длине практически постоянно.

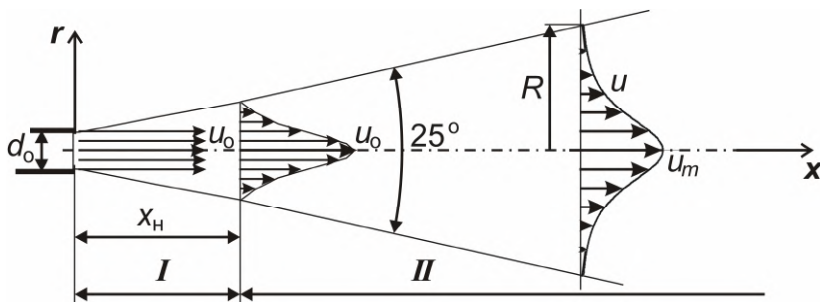


Рис. 8.1. Схема распространения турбулентной струи:

$I$  – начальный участок;  $II$  – основной участок;

$x_H$  – длина начального участка;  $R$  – радиус струи;  $d_0$  – диаметр сопла;

$u_0$  – скорость на выходе из сопла;  $u_m$  – скорость на оси струи

## § 2. Основы теории струйного течения

Свободные турбулентные струи имеют одно важное отличие: ширина струи по радиусу  $r$  мала по сравнению с ее протяженностью по направлению оси  $x$ . Здесь, как и в пограничном слое, изменение скорости в направлении оси  $r$  намного больше, чем по направлению  $x$ . Следовательно, для струйного течения можно применить дифференциальные уравнения пограничного слоя (4.1) или (4.4).

Теоретическое решение задачи о распределении скорости в свободной осесимметричной струе круглого поперечного сечения найдено Шлихтингом. Рассматривалось истечение жидкости из отверстия очень малого диаметра в неограниченную однородную среду, что позволило исключить из рассмотрения начальный участок струи (рис. 8.2). Основной участок занимает всю длину теоретической струи. Прямые линии, ограничивающие теоретическую струю, пересекаются в точке  $P$ , называемой полюсом струи.

Совместно с уравнением неразрывности решалось уравнение пограничного слоя (4.4), записанное в цилиндрических координатах при постоянной плотности среды  $\rho$ ,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \nu r \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (8.1)$$

где  $u$ ,  $v$  – продольная и поперечная компоненты скорости;  $x$ ,  $r$  – продольная (по оси струи) и поперечная (по радиусу струи) координаты,  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости, принятый при решении задачи постоянным.

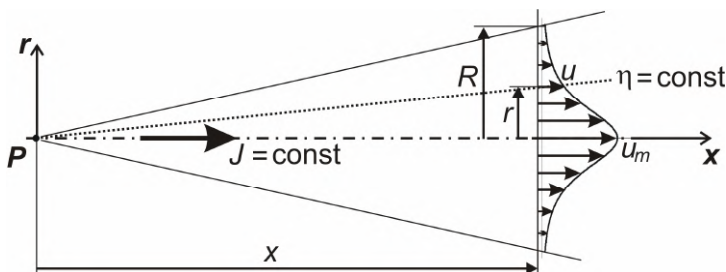


Рис. 8.2. Теоретическая осесимметричная струя:  
 $P$  – полюс,  $R$  – радиус струи;  $u$  – скорость в точке с координатами  $(x, r)$ ;  
 $u_m$  – скорость на оси струи;  $J$  – постоянный поток импульса;  
 $\eta$  – безразмерная радиальная координата

В качестве условия однозначности при интегрировании уравнения (8.1) принято, что поток импульса  $J$ , то есть количество движения, переносимое через поперечные сечения струи за единицу времени, остается постоянным. Это утверждение справедливо, так как свободная струя обменивается количеством движения только с окружающей средой, вовлекая ее в свое движение вместе с отданным ей импульсом.

Для реальной струи поток импульса может быть приближенно определен как произведение массового расхода жидкости  $G_0$  через сопло на среднюю скорость  $u_0$  истечения жидкости плотностью  $\rho_0$  из выходного отверстия сопла диаметром  $d_0$ :

$$J = G_0 u_0 = \frac{\pi}{4} \rho_0 u_0^2 d_0^2. \quad (8.2)$$

Решение дифференциального уравнения (8.1) получено в следующем виде:

$$u = \frac{3J}{8\pi\nu x (1 + \eta^2)^2}, \quad (8.3)$$

где  $J$  – поток импульса через поперечное сечение струи,  $x$  – продольная координата,  $\eta$  – безразмерная радиальная координата,

$$\eta = \frac{r}{8vx} \sqrt{\frac{3J}{\pi\rho}} . \quad (8.4)$$

Как следует из формулы (8.4), безразмерная координата  $\eta$  пропорциональна соотношению координат  $r/x$  и, следовательно, имеет одно и то же значение для точек, лежащих на луче, исходящем из полюса струи (см. рис. 8.2).

С помощью формулы (8.3) можно записать выражение для скорости  $u_m$  на оси струи (при  $\eta = 0$ ):

$$u_m = \frac{3J}{8\pi\rho vx} . \quad (8.5)$$

### § 3. Закономерности турбулентного струйного течения

Теоретическое решение задачи Шлихтинг распространил на турбулентные струи, заменив кинематический коэффициент вязкости  $\nu$  его турбулентным аналогом  $\nu_t$  и предположив, что коэффициент турбулентной вязкости остается постоянным во всей области струйного течения. Согласно экспериментальным данным, коэффициент турбулентной вязкости в центральной части осесимметричной струи зависит от величины скорости  $u_m$  на оси струи и расстояния  $x$  до расчетного сечения струи:

$$\nu_t \approx 0,002 u_m x . \quad (8.6)$$

Подставив выражения для потока импульса (8.2) и для турбулентной вязкости (8.6) в формулу (8.5) и выполнив тождественные преобразования, можно получить следующее приближенное равенство для скорости на оси струи:

$$u_m \approx 6,85 u_0 \frac{d_0}{x} \sqrt{\rho_0/\rho} . \quad (8.7)$$

Из аналогичного преобразования выражения (8.4), следует простое соотношение, определяющее безразмерную координату в осесимметричной турбулентной струе

$$\eta = 7,9 r/x . \quad (8.8)$$

Итак, в свободной турбулентной струе теоретически рассматривается лишь основной участок, имеющий, в отличие от небольшого начального участка, прямолинейные границы (рис. 8.3). Прямые, образующие границы основного участка струи, пересекаются в полюсе струи (точка  $P$  на рис. 8.3) на расстоянии  $x_0$  от выходного отверстия сопла. Применяя теоретическое решение задачи к реальной турбулентной струе, более удобно иметь начало осей координат в выходном отверстии сопла, положение которого вполне определено. При этом расстояние от полюса струи до расчетного сечения становится равным сумме  $x+x_0$  (см. рис. 8.3).

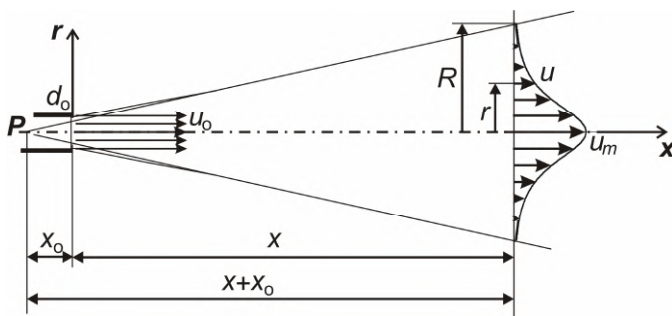


Рис. 8.3. Система координат осесимметричной турбулентной струи:  
 $P$  – полюс струи,  $x_0$  – расстояние от среза сопла до полюса струи,  
 $d_0$  – диаметр сопла

В новых координатах формулы (8.3), (8.7) и (8.8) для осесимметричной турбулентной струи примут следующий расчетный вид:

$$u = \frac{u_m}{(1 + \eta^2)^2}, \quad (8.9)$$

$$u_m \approx 6,85 u_0 \frac{d_0}{x + x_0} \sqrt{\rho_0 / \rho}. \quad (8.10)$$

$$\eta = 7,9 \frac{r}{x + x_0}. \quad (8.11)$$

Полученные теоретические зависимости хорошо совпадают с результатами измерения скорости в турбулентных струях, за исключением небольшой области вблизи границ струи. Как сле-

дует из формулы (8.9), в поперечных сечениях основного участка струи относительная скорость  $u/u_m$  имеет одно и то же значение в тех точках, где координата  $\eta$  остается постоянной, то есть на луче, исходящем из полюса струи (см. рис. 8.2).

Одно из преимуществ теоретического решения задачи состоит в том, что формула (8.10) позволяет учитывать различие плотности жидкости  $\rho_o$ , вытекающей из сопла, и плотности окружающей среды  $\rho$ , вовлекаемой в струйное течение. Похожие условия имеют место при горении газообразного топлива в турбулентном факеле.

#### § 4. Транспортирующая способность турбулентной струи

Рассмотрим способность газообразного топлива, вытекающего из горелки с большой скоростью  $u_o$  (без воспламенения), вовлекать в струю окружающий воздух, необходимый для горения.

Массовый расход топлива через сопло горелки, диаметр которого  $d_o$ , определяется по уравнению расхода (1.2):

$$G_o = \frac{\pi}{4} \rho_o u_o d_o^2. \quad (8.12)$$

Зная распределение скорости  $u$  в струе, согласно формулам (8.9) – (8.11), можно записать выражение для бесконечно малого расхода  $dG$  через элементарный кольцеобразный элемент  $dS$ :

$$dG = \rho u \cdot dS = \rho u \cdot 2\pi r dr = 2\pi \rho \frac{u_m}{(1 + \eta^2)^2} \frac{(x + x_o)^2}{7,9^2} \eta d\eta.$$

Массовый расход газообразной среды  $G$  через любое поперечное сечение основного участка струи определяется интегрированием элементарного расхода  $dG$  по всей площади  $S$  поперек струи при условии, что плотность  $\rho$  постоянна :

$$G = \int_{(S)} dG = 2\pi \rho u_m \frac{(x + x_o)^2}{7,9^2} \int_0^{\eta_{rp}} \frac{\eta d\eta}{(1 + \eta^2)^2}. \quad (8.13)$$

Чтобы компенсировать небольшое теоретическое завышение скорости вблизи границ струи, расчетный угол раскрытия границ струи принимается равным  $24^\circ$  (на  $1^\circ$  меньше экспери-

ментально установленного значения), что соответствует безразмерной координате границы струи  $\eta_{\text{гр}}=1,667$ .

Определенный интеграл от степенной функции в результате подстановки пределов интегрирования дает число:

$$\int_0^{\eta_{\text{гр}}} \frac{\eta d\eta}{(1+\eta^2)^2} = \int_0^{\eta_{\text{гр}}} \frac{d(1+\eta^2)}{2(1+\eta^2)^2} = -\frac{1}{2(1+\eta^2)} \Big|_0^{\eta_{\text{гр}}} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{1+1,667^2} \right) = 0,3677.$$

В итоге, после деления выражения (8.13) на массовый расход  $G_0$  топлива через горелку (8.12) и подстановки зависимости (8.10) для скорости  $u_m$  на оси струи, получается формула массового расхода газообразной среды через поперечные сечения осесимметричной турбулентной струи:

$$\frac{G}{G_0} = 0,322 \frac{x+x_0}{d_0} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}. \quad (8.14)$$

Если принять, что на выходе из сопла горелки (при  $x=0$ ) расчетный массовый расход газообразной среды  $G$  приблизительно равен массовому расходу топлива  $G_0$ , то из уравнения (8.14) следует формула для расчета массового расхода воздуха  $G_{\text{в}}$ , вовлеченного топливом в струйное течение:

$$\frac{G_{\text{в}}}{G_0} = 0,322 \frac{x}{d_0} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}. \quad (8.15)$$

Эта формула хорошо совпадает с результатами экспериментов.

## § 5. Особенности течения жидкости в плоских струях

Плоская струя образуется при истечении жидкости с большой скоростью из узкой высокой щели. Вытекающая жидкость обменивается с плоских боков потока количеством движения с окружающей средой и постепенно увлекает ее в струйное движение. В результате струя расширяется вниз по течению, в то время как скорость ее течения уменьшается.

Для свободной плоской струи получено теоретическое решение задачи при таких же предпосылках, как и для осесимметричной струи: решались дифференциальные уравнения в приближении пограничного слоя, поток импульса и коэффициент

турбулентной вязкости считались постоянными, координата  $x$  отсчитывалась от полюса струи.

Полученное в результате теоретическое распределение скорости в турбулентной плоской струе определяется следующими уравнениями в декартовой системе координат (ось  $x$  направлена вдоль, ось  $y$  – поперек плоской струи,  $b_0$  – ширина узкой щели, из которой истекает струя):

скорость в поперечном сечении основного участка струи

$$u = u_m \left[ 1 - \left( \frac{1 - e^{-2\eta}}{1 + e^{-2\eta}} \right)^2 \right]; \quad (8.16)$$

скорость на оси струи

$$u_m = 2,4 u_0 \sqrt{\frac{b_0 \rho_0}{x \rho}}; \quad (8.17)$$

безразмерная координата

$$\eta = 7,67 y / x.$$

Сопоставление этих уравнений с формулами для осесимметричной струи показывает отличительные особенности течения в плоской струе. Согласно уравнению (8.17), скорость  $u_m$  на оси плоской струи снижается обратно пропорционально квадратному корню из координаты  $x$ , то есть медленнее, чем в осесимметричной струе, где она обратно пропорциональна  $x$  в первой степени (рис. 8.4).

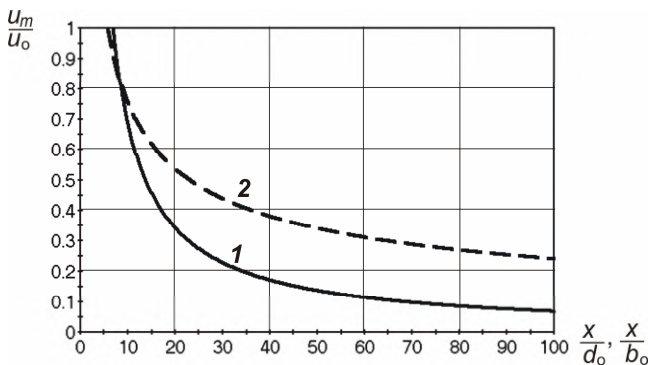


Рис. 8.4. Изменение осевой скорости  $u_m$  по длине струи: 1 – осесимметричной (в зависимости от  $x/d_0$ ); 2 – плоской (в зависимости от  $x/b_0$ )

Из уравнения (8.16) следует, что в поперечных сечениях плоской струи отношение скорости  $u$  к скорости  $u_m$  на оси струи больше, чем в осесимметричной струе с круглым поперечным сечением (при одинаковых значениях относительной координаты  $\eta$ ) (рис. 8.5).

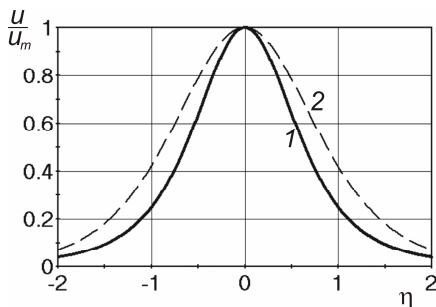


Рис. 8.5. Относительная скорость  $u/u_m$  в поперечных сечениях струи:  
1 – осесимметричной; 2 – плоской

### Вопросы для самопроверки

1. Как образуется струйное течение жидкости или газа?
2. Почему поток импульса остается постоянным по длине свободной струи?
3. Как определить положение полюса осесимметричной турбулентной струи?
4. Как изменяется скорость в поперечных сечениях основного участка осесимметричной турбулентной струи?
5. Как создается транспортирующая способность струи?
6. Каковы особенности течения жидкости в плоских струях?



## Глава 9. АДИАБАТНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗОВ

### § 1. Термодинамические условия расширения газа

Параметры **совершенного** газа подчиняются уравнению состояния:

$$p/\rho = RT, \quad (9.1)$$

где  $p$  – статическое давление,  $\rho$  – плотность газа,  $T$  – термодинамическая температура,  $R$  – индивидуальная газовая постоянная, которая, в свою очередь, равна разности удельных массовых теплоемкостей при постоянном давлении  $c_p$  и при постоянном объеме  $c_v$ ,

$$R = c_p - c_v = c_v \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right) = c_v (k - 1). \quad (9.2)$$

Здесь соотношение теплоемкостей заменено коэффициентом  $k$ :

$$k \equiv c_p / c_v.$$

Коэффициент  $k$  называют показателем адиабаты, поскольку он входит в уравнение адиабатного расширения газа:

$$p/\rho^k = \text{const}. \quad (9.3)$$

При расширении совершенного газа изменяются не только его параметры состояния, но и удельная внутренняя энергия  $U$ , равная произведению  $c_v T$ . Заменив теплоемкость  $c_v$  по уравнению (9.2) выражением  $c_v = R/(k-1)$  и применив уравнение состояния (9.1), можно показать, что внутренняя энергия совершенного газа пропорциональна соотношению его давления и плотности:

$$U = c_v T = \frac{1}{k-1} RT = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho}. \quad (9.4)$$

### § 2. Скорость истечения совершенного газа

Газодинамика изучает движение сжимаемых газов с высокой скоростью, которая может превышать скорость звука. Высокая скорость достигается при истечении газа из профилированного сопла без потери энергии на образование вихрей (рис. 9.1). Так как давление  $p$  за соплом резко падает, то при истечении газ

расширяется, что приводит к существенному изменению его плотности  $\rho$ , температуры  $T$  и удельной внутренней энергии  $U$ .

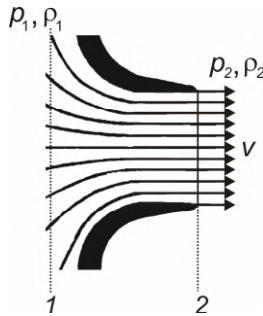


Рис. 9.1. Истечение газа из сопла:

1, 2 – входное и выходное сечение сопла;  $v$  – скорость истечения газа;  
 $p$  и  $\rho$  – давление и плотность газа в сечениях 1 и 2

Закон сохранения энергии потока при истечении газа из сопла отличается от прежнего его представления в форме уравнения Бернулли (2.4), так как необходимо дополнительно учитывать изменение плотности  $\rho$  и внутренней энергии  $U$ , приходящейся на единицу массы газа:

$$U_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = U_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2}. \quad (9.5)$$

Здесь, в отличие от уравнения (2.4), отброшено геометрическое давление  $\rho g z$  ввиду его малости для газа и слагаемые уравнения (2.4) поделены на плотность, чтобы придать каждому члену уравнения (9.5) физический смысл энергии, приходящейся на единицу массы газа, Дж/кг.

Пренебрегая в уравнении (9.5) начальной скоростью  $v_1$  ввиду ее малости, получают выражение для скорости  $v$  истечения газа:

$$v = \sqrt{2 \left( U_1 - U_2 + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)}.$$

Подставив в него соотношение (9.4) для удельной внутренней энергии, приходят к зависимости скорости истечения от соотношения давления и плотности в поперечных сечениях потока:

$$v = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left( 1 - \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)}.$$

Здесь при решении задачи остается неопределенной плотность газа  $\rho_2$  в выходном сечении сопла. Обычно полагают, что при истечении газа можно пренебречь теплообменом с окружающей средой и трением потока о стенки сопла. В этих условиях расширение газа описывается уравнением адиабаты (9.3), в соответствии с которым значения плотности и давления в поперечных сечениях сопла связаны следующим соотношением:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = (p_1/p_2)^{1/k}. \quad (9.6)$$

Подставляя это соотношение в предыдущее выражение, получают расчетную формулу для скорости истечения совершенного газа из сопла под воздействием перепада давления:

$$v = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right]}. \quad (9.7)$$

Формула (9.7) показывает, что при заданном начальном давлении  $p_1$  скорость истечения  $v$  возрастает с уменьшением давления  $p_2$  в выходном сечении сопла.

Массовый расход газа через сопло можно определить по формуле расхода (1.2):

$$G = \rho_2 v S,$$

где  $S$  – площадь выходного сечения сопла.

Если заменить плотность  $\rho_2$  выражением по уравнению адиабаты (9.6),

$$\rho_2 = \rho_1 (p_2/p_1)^{1/k},$$

и скорость истечения выражением (9.7), то формула массового расхода совершенного газа примет следующий вид:

$$G = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_1 \rho_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \cdot S. \quad (9.8)$$

### § 3. Критические параметры истечения газа

Из формулы (9.8) следует, что массовый расход газа  $G$  равен нулю при соотношении давлений  $p_2/p_1 = 0$  и при  $p_2/p_1 = 1$ . В интервале между этими значениями функция  $G$  должна иметь максимум. Условие максимума функции (9.8) находят, приравняв нулю ее производную, взятую по переменной величине отношения давлений  $p_2/p_1$ . При постоянной площади выходного отверстия сопла  $S$  достаточно взять производную только от выражения в квадратных скобках, так как остальные множители, входящие в формулу (9.8), не зависят от величины  $p_2/p_1$ .

Для удобства дифференцирования обозначим отношение давлений символом  $X = p_2/p_1$ , а выражение в квадратных скобках – символом  $Y$ ,

$$Y = X^{2/k} - X^{(k+1)/k}. \quad (9.9)$$

Эта степенная зависимость показана на рис. 9.2.

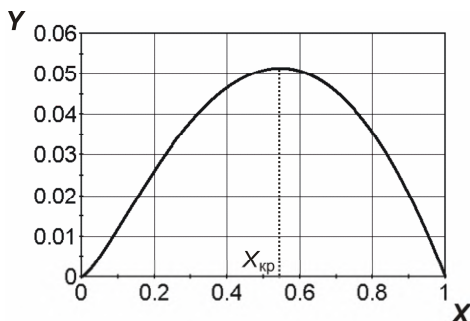


Рис. 9.2. Графическое изображение зависимости (9.9) при  $k=1,3$

Производная от степенной функции  $Y$  имеет следующий вид:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{2}{k} X^{(2-k)/k} - \frac{k+1}{k} X^{1/k}.$$

Точку  $X_{кр}$ , где достигается максимум функции, называют **критической**. Критическое значение  $X_{кр}$  находят, приравняв производную к нулю:

$$\frac{2}{k} X_{кр}^{(2-k)/k} - \frac{k+1}{k} X_{кр}^{1/k} = 0.$$

Из последнего равенства следует выражение для критического соотношения давлений, которому соответствует максимальный расход газа при постоянном значении выходной площади сопла:

$$\left( \frac{p_2}{p_1} \right)_{\text{кр}} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)}. \quad (9.10)$$

Скорость истечения, соответствующую критическому отношению давлений  $(p_2/p_1)_{\text{кр}}$ , также называют **критической**. Подставляя соотношение (9.10) в формулу (9.7), получают значение критической скорости истечения

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{2 \frac{k}{k+1} \frac{p_1}{\rho_1}}. \quad (9.11)$$

Критическую скорость истечения можно выразить через давление  $p_{\text{кр}}$  и плотность газа  $\rho_{\text{кр}}$  в выходном сечении сопла. Для этого нужно применить соотношение (9.10),

$$p_1 = p_{\text{кр}} \left( \frac{k+1}{2} \right)^{k/(k-1)},$$

и уравнение адиабаты (9.6),

$$\rho_1 = \rho_{\text{кр}} \left( \frac{k+1}{2} \right)^{1/(k-1)}.$$

Если подставить эти выражения в формулу (9.11), то получится зависимость, известная в физике как формула скорости звука:

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{k p_{\text{кр}} / \rho_{\text{кр}}}$$

Таким образом, **критическая скорость истечения равна местной скорости звука**, соответствующей локальным термодинамическим условиям (давлению и температуре газа).

#### § 4. Профиль сопла для адиабатного истечения газа

Формулу (9.8) можно применить для нахождения профиля сопла, приняв, что величина  $p_2$  представляет собой давление в очередном поперечном сечении и  $S$  – площадь этого сечения.

По длине сопла давление  $p_2$  постепенно понижается. При этом разность величин в квадратных скобках в формуле (9.8)

возрастает, если отношение давлений  $p_2/p_1$  больше критического, и, наоборот, уменьшается, если это отношение меньше критического. Следовательно, для обеспечения одного и того же массового расхода газа  $G = \text{const}$  площадь  $S$  очередного поперечного сечения сопла должна по мере снижения давления сначала уменьшаться (при  $p_2/p_1$  больше критического), а затем увеличиваться (при  $p_2/p_1$  меньше критического).

Таким образом, в общем случае сопло для истечения газа должно иметь форму сужающегося конфузора, плавно переходящего в расширяющийся диффузор. Его называют соплом Лаваля (рис. 9.3). В наиболее узкой части сопла Лаваля давление равно критическому  $p_{кр}$  и устанавливается критическая скорость  $V_{кр}$ , равная местной скорости звука. В конфузоре развивается скорость газа меньше скорости звука, в диффузоре достигается сверхзвуковая скорость истечения.

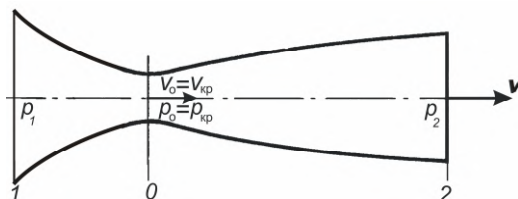


Рис. 9.3. Сопло Лаваля для сверхзвукового истечения газа:  
0, 1, 2 – поперечные сечения сопла;  $p_{кр}$ ,  $V_{кр}$  – критические давление и скорость газа

С физической точки зрения, профиль сопла зависит от характера изменения плотности газа по его длине. При малой скорости газа изменением его плотности можно пренебречь и тогда, согласно уравнению постоянства расхода (1.16), для увеличения скорости истечения необходимо уменьшать очередное сечение сопла. Следовательно, начальная часть сопла должна сужаться.

При дальнейшем расширении газа увеличение скорости компенсируется заметным уменьшением плотности, и поэтому сопло сужается не столь быстро. При достижении скорости звука плотность расширяющегося газа уменьшается обратно пропорционально его скорости. В дальнейшем падение плотности превосходит увеличение скорости. При этом, согласно уравнению постоянства расхода (1.16), расчетное поперечное сечение сопла будет увеличиваться. Следовательно, сверхзвуковая часть сопла должна быть расширяющейся.

## § 5. Особенности истечения газа из сужающегося сопла

Часто для расширения газа применяют сопло наиболее простой формы – сужающееся (см. рис. 9.1). Истечение газа из сужающегося сопла может происходить на двух режимах, показанных на рис. 9.4, – с дозвуковой скоростью (кривая 1) и со скоростью звука (кривая 2).

При объяснении различия между этими режимами надо иметь в виду, что изменение давления  $p_2$  за соплом распространяется в газовой среде в виде волн давления со скоростью звука. На первом режиме истечения газа волны давления проникают внутрь сопла, в результате чего давление внутри сопла на кромке его выходного отверстия всегда равно давлению  $p_2$  за соплом. Скорость истечения газа соответствует теоретической зависимости (9.7).

На втором режиме, когда соотношение давлений  $p_2/p_1$  становится меньше критического, скорость истечения газа достигает скорости звука, которую волны давления не могут преодолеть. В результате давление внутри сопла на кромке его выходного отверстия остается равным критическому давлению  $p_{кр}$ . Скорость истечения газа в этом случае соответствует теоретической зависимости (9.7) только при условии, что в ней давление  $p_2$  заменено критическим  $p_{кр}$ .

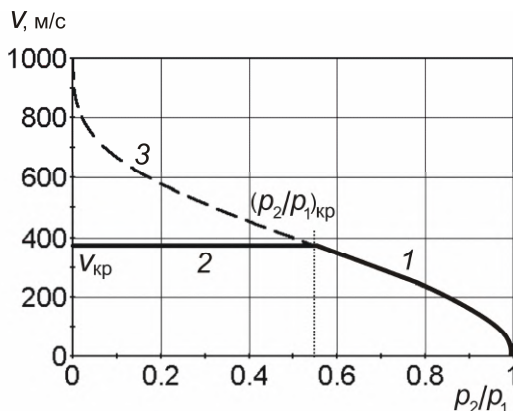


Рис. 9.4. Изменение скорости истечения  $v$  газа в зависимости от соотношения давлений  $p_2/p_1$ :

1 – из сужающегося сопла при  $p_2/p_1 > (p_2/p_1)_{кр}$ ; 2 – из сужающегося сопла при  $p_2/p_1 < (p_2/p_1)_{кр}$ ; 3 – из расширяющегося сопла при  $p_2/p_1 < (p_2/p_1)_{кр}$

Переход от критического давления  $p_{кр}$  на кромке сужающегося сопла к давлению  $p_2$  за соплом, если оно меньше критического, происходит резким скачком. Его называют **скачком уплотнения**, так как в нем резко изменяется плотность газа. Толщина скачка уплотнения очень мала. Она соизмерима с длиной свободного пробега молекул.

Если бы сопло имело расширяющуюся часть, то механическая энергия потока соответствовала бы сверхзвуковой скорости истечения, представленной пунктирной кривой 3 на рис. 9.4. Поток газа, вытекающий из сужающегося сопла со звуковой скоростью (кривая 2), имеет меньшую механическую энергию. Следовательно, в скачке уплотнения происходит потеря (диссипация) механической энергии, обусловленная ее переходом в тепловую энергию и рассеянием в окружающей среде.

Различают два основных вида скачков уплотнения – прямой и косой. Характерной особенностью **прямого скачка** уплотнения является то, что газовый поток направлен по нормали к его фронту и не меняет своего направления, пересекая его. Скорость газа за прямым скачком всегда меньше скорости звука.

**Косой скачок** уплотнения располагается наклонно к направлению потока. Пересекая фронт косого скачка уплотнения при сверхзвуковом обтекании твердого тела, газовый поток изменяет направление своего движения. В отличие от прямого скачка в косом скачке уплотнения претерпевает разрыв (скачкообразное уменьшение) не полная скорость газового потока, а только ее составляющая, нормальная к фронту скачка. Поэтому при одной и той же скорости набегающего потока потеря механической энергии в косом скачке уплотнения всегда меньше, чем в прямом.

## § 6. Понятие о скачке конденсации

Температуру совершенного газа на выходе из сопла находят, записав уравнение адиабаты (9.6) в виде

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{(k-1)/k}$$

и заменив в нем отношения  $p_2/p_1$  и  $\rho_2/\rho_1$  их выражениями по уравнению состояния газа (9.1):



$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k}.$$

Из этой формулы следует, что температура газа в процессе его адиабатного истечения понижается.

Также и при сверхзвуковом истечении перегретого водяного пара его температура понижается. Расширяющийся пар достигает температуры насыщения, но не конденсируется вследствие скоротечности процесса его охлаждения и некоторое время находится в переохлажденном состоянии. При определенном переохлаждении начинается бурная конденсация пара, сопровождающаяся выделением теплоты фазового перехода. Этот процесс может рассматриваться как скачкообразный. Его называют **скачком конденсации**. Так как в скачке теплота извне не подводится, а только выделяется при конденсации части текущего пара, то полная энергия потока до и после скачка конденсации остается постоянной.

### Вопросы для самопроверки

1. При каких условиях происходит адиабатное расширение газа?
2. Каким физическим условиям соответствуют критические параметры истечения совершенного газа?
3. Какую форму имеет сопло для истечения газа со сверхзвуковой скоростью?
4. Каковы особенности истечения газа из сужающегося сопла?
5. Что приводит к образованию скачка уплотнения при истечении газа из сужающегося сопла?
6. При каких условиях образуется скачок конденсации?

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Законы и уравнения гидрогазодинамики, изложенные в учебном пособии, в ряде случаев непосредственно применяются при решении технических задач. Примером могут служить аэродинамические расчеты, которые являются неременной составной частью проектирования котельных агрегатов и промышленных печей. Дифференциальные уравнения движения, интегрирование которых еще недавно встречало непреодолимые трудности, стали основой новой быстро развивающейся науки – вычислительной динамики жидкости и газа.

Широкая область применения открывается перед гидрогазодинамикой как составной частью науки о конвективном переносе теплоты и вещества. Проблемы организации движения расплавленной стекломассы в бассейне стекловаренной печи или горения топлива в высокотемпературном факеле цементной вращающейся печи невозможно решить без уравнений ламинарного и турбулентного движения вязкой жидкости и газа.

Математические модели с дифференциальными уравнениями, компьютерные вычисления в наше время непосредственно входят в деятельность специалистов. Знание основ гидрогазодинамики поможет студентам овладеть инженерными методами современной энергетики теплотехнологии.

## **Библиографический список**

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. Ч.1. – М.: Наука, 1991. – 600 с.
2. Кутателадзе С.С. Анализ подобия и физические модели. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
3. Самойлович Г.С. Гидрогазодинамика. – М.: Машиностроение, 1990. – 384 с.
4. Швыдкий В.С. Механика жидкости и газа / В.С. Швыдкий, Ю.Г. Ярошенко, Я.М. Гордон, В.С. Шаврин, А.С. Носков. – М.: ИКЦ "Академкнига", 2003. – 464 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М: Наука, 1974. – 712 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
Глава 1. Основные понятия и определения .....	5
§ 1. Физические параметры жидкости и газа .....	5
§ 2. Гипотеза сплошной среды в гидрогазодинамике .....	7
§ 3. Некоторые понятия математической теории поля .....	10
§ 4. Дифференциальное уравнение неразрывности .....	13
Вопросы для самопроверки .....	16
Глава 2. Динамика идеальной жидкости .....	17
§ 1. Дифференциальные уравнения Эйлера .....	17
§ 2. Уравнение Бернулли .....	19
§ 3. Физический смысл уравнения Бернулли .....	22
§ 4. Применение уравнения энергии в гидростатике .....	24
§ 5. Измерение скорости и расхода жидкости .....	27
Вопросы для самопроверки .....	29
Глава 3. Теоретические основы динамики вязкой жидкости .....	30
§ 1. Дифференциальные уравнения сохранения количества движения .....	30
§ 2. Законы внутреннего трения вязкой жидкости .....	32
§ 3. Дифференциальные уравнения Навье–Стокса .....	34
§ 4. Понятие о подобии гидродинамических процессов .....	36
§ 5. Числа гидродинамического подобия .....	38
§ 6. Теоремы подобия .....	40
Вопросы для самопроверки .....	41
Глава 4. Ламинарное течение вязкой жидкости .....	42
§ 1. Условия ламинарного течения жидкости в трубах .....	42
§ 2. Приближение пограничного слоя .....	43
§ 3. Явление отрыва пограничного слоя .....	45
§ 4. Напряжение силы внутреннего трения в трубе .....	45
§ 5. Закономерности течения вязкой жидкости в трубе .....	47
§ 6. Объемный расход и перепад давления в трубе .....	49
Вопросы для самопроверки .....	50
Глава 5. Турбулентное движение жидкости .....	51
§ 1. Статистические характеристики турбулентности .....	51
§ 2. Турбулентные напряжения сил внутреннего трения .....	52
§ 3. Генерация и диссипация энергии турбулентности .....	54
§ 4. Структура турбулентного пограничного слоя .....	55
§ 5. Полуэмпирическая гипотеза Прандтля .....	56
§ 6. Логарифмическое распределение скорости .....	58
§ 7. Полуэмпирическая гипотеза Колмогорова .....	60
Вопросы для самопроверки .....	61

Глава 6. Гидродинамические сопротивления .....	62
§ 1. Виды гидродинамических сопротивлений .....	62
§ 2. Гидродинамическое сопротивление трения .....	63
§ 3. Местные гидродинамические сопротивления .....	66
§ 4. Гидродинамические сопротивления при внешнем обтекании тел .....	68
§ 5. Работа насоса в гидравлической сети .....	70
Вопросы для самопроверки .....	72
Глава 7. Двухфазные потоки и системы .....	73
§ 1. Особенности гидродинамики двухфазных систем .....	73
§ 2. Свободное осаждение шарообразной частицы .....	73
§ 3. Псевдооживление .....	77
§ 4. Гидродинамика псевдооживленного слоя .....	79
§ 5. Гидро- и пневмотранспорт .....	81
§ 6. Двухфазные системы "жидкость – газ" .....	83
Вопросы для самопроверки .....	86
Глава 8. Турбулентное струйное течение .....	87
§ 1. Основные свойства турбулентных струй .....	87
§ 2. Основы теории струйного течения .....	88
§ 3. Закономерности турбулентного струйного течения .....	90
§ 4. Транспортирующая способность турбулентной струи .....	92
§ 5. Особенности течения жидкости в плоских струях .....	93
Вопросы для самопроверки .....	95
Глава 9. Адиабатное истечение газов .....	96
§ 1. Термодинамические условия расширения газа .....	96
§ 2. Скорость истечения совершенного газа .....	96
§ 3. Критические параметры истечения газа .....	99
§ 4. Профиль сопла для адиабатного истечения газа .....	100
§ 5. Особенности истечения газа из сужающегося сопла .....	102
§ 6. Понятие о скачке конденсации .....	103
Вопросы для самопроверки .....	104
Заключение .....	105
Библиографический список .....	105

Учебное издание

**Кузнецов** Валерий Алексеевич

Основы гидрогазодинамики

Учебное пособие

Подписано в печать 22.05.12. Формат 60х 84/16. Усл. печ. л. 6,3. Уч.-изд. л. 6,8.

Тираж 500 экз.

Заказ

Цена

Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете  
им. В.Г. Шухова

308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46