Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим через $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ фокусы гиперболы,$|F_1F_2| = 2$c. Сумму расстояний от любой точки $M(x,y)$ до точек $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ обозначим через $2a$: $2a < 2c$. Числа r_1 и r_2 называются **фокальными** радиусами (рис. 1). По определению гиперболы получим уравнение:

$$|r_1 - r_2| = 2a, \text{ пусть } r_1 > r_2$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a;$$

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right);$$

Пусть $b^2=c^2-a^2; \quad b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2;$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Полученное уравнение гиперболы называется **каноническим**.

Основные свойства гиперболы (рис. 1):

1. гипербола симметрична относительно осей и начала координат. Оси симметрии называются **осями гиперболы**, центр симметрии называется **центром** гиперболы;
2. одна из осей симметрии пересекает гиперболу в двух точках, которые называются **вершинами**;
3. ось, на которой находятся вершины гиперболы называется **действительной**

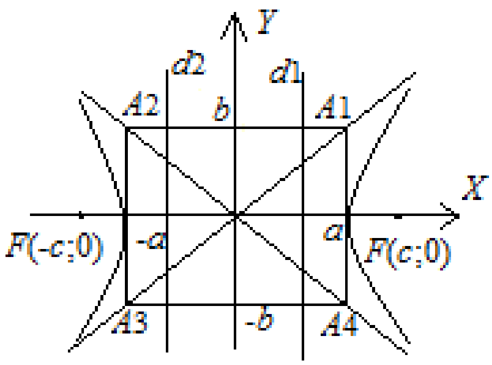

Рис. 1

осью (a – **действительная полуось**), другая ось называется **мнимой** (b – **мнимая полуось**);

4. прямоугольник $A_1A_2A_3A_4$ со сторонами $2a$ *и* $2b$ называется **основным прямоугольником гиперболы**;
5. фокусы гиперболы находятся на действительной оси;
6. связь между полуосями и расстоянием между фокусами
$$b^2 = c^2 - a^2;$$
7. гипербола, определяемая уравнением
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
называется **сопряженной**; у сопряженной гиперболы фокусы находятся на оси OY и $a^2 = c^2 - b^2$;
8. прямые, заданные уравнениями $y = \pm\frac{b}{a}x$

   называются **асимптотами** гиперболы; асимптоты – это диагонали главного прямоугольника гиперболы;
9. **эксцентриситетом** гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к действительной оси гиперболы:
$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$
   Свойства эксцентриситета:
   1) так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$;
   2) $\frac{a}{b} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$;
10. **директрисами** гиперболы называются прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и проходящие на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от центра гиперболы (директрисы проходят между фокусами гиперболы):
$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon};$$
11. теорема: если r – расстояние от произвольной точки M гиперболы до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ – есть величина постоянная, равная эксцентриситету: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Пример. Установить какую кривую задает уравнение:
$$y = 7 - 1{,}5\sqrt{x^2 - 6x + 13}.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде: $y - 7 = -1{,}5\sqrt{x^2 - 6x + 13}.$

Возведем уравнение в квадрат, получим:

$$\left(y-7\right)^2=2,25\left(x^2-6x+13\right).$$

Выделяя полный квадрат для переменной *x*, получим искомое уравнение:

$$\frac{\left(x-3\right)^2}{4}-\frac{\left(y-7\right)^2}{9}=-1.$$

Это уравнение определяет гиперболу с центром в точке $M\left(3;7\right)$, полуосями $a=2,\ b=3,$ фокусами, находящимися на оси, параллельной оси OX.

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, называемой **фокусом**, и от данной прямой BD, называемой **директрисо**й, не проходящей через фокус (рис. 2).

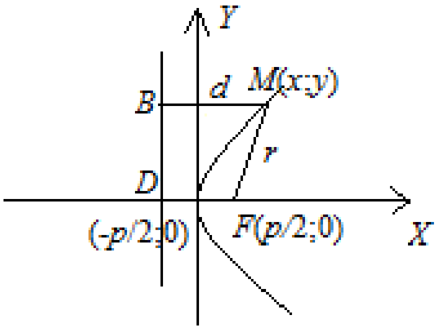

Рис. 2

Пусть если $MB=d,\ MF=r,\ FD=p,\ r$ – **фокальный радиус**, p – параметр параболы, точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус параболы, точка D имеет координаты $D\left(-\frac{p}{2};0\right)$ и принадлежит директрисе параболы $x=-\frac{p}{2}$.

По определению параболы получим: $r=d$.

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2};$$

$$y^2=2px.$$

Полученное уравнение называется каноническим уравнением параболы. Аналогично можно вывести уравнения вида:

$$y^2=-2px,\ x^2=2py,\ x^2=-2py.$$

Свойства параболы:

1. парабола симметрична относительно оси *OX;*
2. точка $O(0;0)$ является **центром** параболы; ось симметрии OX является **осью** параболы;
3. p – параметр параболы, равный расстоянию от фокуса до директрисы.

Пример. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $x^2 = 16y$ перпендикулярна к прямой $2x + 4y + 7 = 0$.

Решение. Уравнение искомой прямой перпендикулярно данной, следовательно, ее угловой коэффициент равен 2, уравнение имеет вид: $y = 2x + b$. Прямая касается параболы, следовательно, имеет с ней одну общую точку, которую можно определить из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x + b; \\ x^2 = 16y. \end{cases}$$

Получим уравнение: $x^2 - 32x - 16b = 0$.

Из условия $32^2 + 4 \cdot 16b = 0$, получим значение $b = -16$.

Искомое уравнение имеет вид: $y = 2x - 16$.

Ссылка: https://vkvideo.ru/video-216917038_456240758