Лекция 7

Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

1. Расстояние между двумя точками

Рассмотрим прямоугольную систему координат (декартовую, рис. 1).

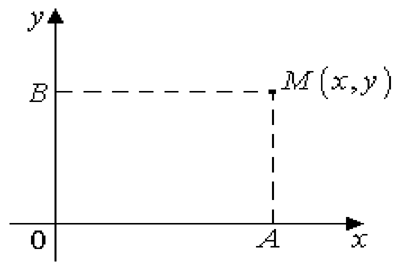

Рис. 1

Любой точки M соответствуют координаты $OA = x-$ абсцисса, $OB = y-$ ордината точки $M(x, y)$, то есть каждой точке плоскости соответствует единственная пара чисел и наоборот.

Теорема. Для любых двух точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ плоскости расстояние d между ними определяется формулой:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

2. Площадь треугольника

Теорема. Для любых точек $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$, не лежащих на одной прямой (рис.2), площадь треугольника ABC выражается формулой (2):

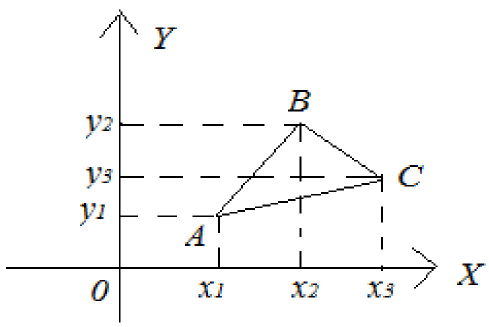

Рис. 2

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right]\right|.$$

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

Пример. Известна площадь треугольника ABC, заданного вершинами $A(-2,1),\ B(2,2),\ C(4,y)$: $S_{\Delta ABC}=15$. Найти значение неизвестной координаты y.

Решение. Составим определитель, используя формулу вычисления площади треугольника:

$$S_{\Delta ABC}=15=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2+2 & 2-1 \\ 4+2 & y-1 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & y-1 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\left(4(y-1)-6\right),$$

$$\pm15=2y-5,\ y_1=10,\ y_2=-5.$$

Ответ: $y_1=10$, $y_2=-5$.

3. Деление отрезка в данном отношении

Пусть на плоскости задан произвольный отрезок $M_1\left(x_1;y_1\right), M_2\left(x_2;y_2\right)$ и любая точка M принадлежащая отрезку M_1M_2.

Пусть отношение $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda$. В отношении λ точка M делит отрезок M_1M_2 (рис. 3).

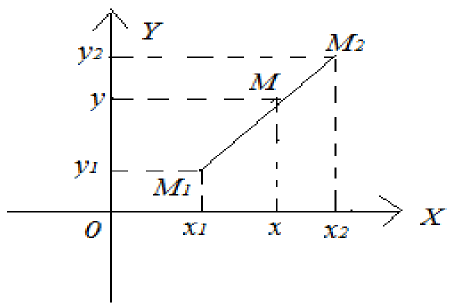

Рис. 3

Теорема. Если точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то координаты этой точки определяются по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ \ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

где $M_1\left(x_1;y_1\right), M_2\left(x_2;y_2\right)$.

Следствие: если M - середина M_1M_2, $\lambda = 1$, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Пример. Пусть точка C(2, 3) делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$. Найти координаты точки B, если A(1, 2).

Решение. Подставим известные координаты точек C(2, 3) и A(1, 2) в формулы:

$$x = \frac{1 + 0,5x_B}{1 + 0,5} = 2, \qquad y = \frac{2 + 0,5y_B}{1 + 0,5} = 3.$$

$$x_B = (2 \cdot 1,5 - 1)2 = 4,$$

$$y_B = (3 \cdot 1,5 - 2)2 = 5.$$

Ответ: B(4, 5).

4. Полярные координаты

Полярная система координат состоит из некоторой точки O, называемой полюсом, и исходящего из нее луча OP, называемой полярной осью (рис. 4). Задается масштаб для измерения длин отрезков.

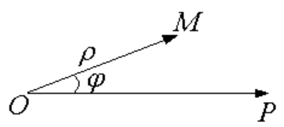

Рис. 4

Любая точка M в полярной системе характеризуется расстоянием $OM = \rho$ (ρ - полярный радиус, $\rho \geq 0$) и углом поворота φ луча OM от оси OP (φ - полярный угол, $0 \leq \varphi < 2\pi$).

Положительные углы отсчитываются против часовой стрелки, отрицательные – по часовой стрелке.

5. Связь декартовых и полярных координат

Пусть начало прямоугольной системы совпадает с полярным полюсом, ось X совпадает с полярной осью OP (рис.5).

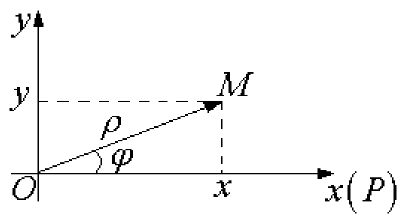

Рис. 5

Тогда для точки M справедливо равенство: $M(x,y)=M(\rho,\varphi)$. Из треугольника получим уравнения связи координат:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi; \end{cases}$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}; \qquad tg\varphi=\frac{y}{x}.$$

6. Преобразования прямоугольных координат

На плоскости обычно исследуется следующие преобразования прямоугольных координат: параллельный перенос и поворот осей координат.

1. Параллельный перенос осей.

При параллельном переносе осей координат изменяется положение начала координат, направление осей координат не меняется.

Рассмотрим переход системы координат XOY (старая) в систему $X_1O_1Y_1$ (новая) (рис. 6).

Пусть точки O_1 и точка M в старой системе имеет координаты $O_1(a,b)$, $M(x,y)$. В новой системе $X_1O_1Y_1$ точка M имеет координаты: $M(x_1,y_1)$. Тогда формулы перехода:

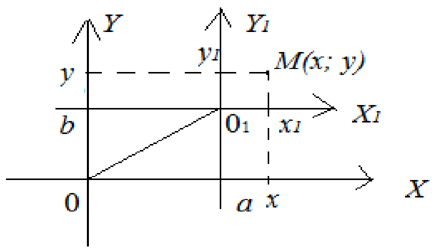

Рис. 6

1) от «старых» координат в «новые» имеют вид :

$$x_1=x-a, \; y_1=y-b;$$

2) от «новых» координат к «старым»:

$$x=x_1+a, \; y=y_1+b.$$

2. Поворот осей координат.

При повороте осей координат начало системы координат не меняется, а оси поворачиваются на один и тот же угол. Пусть система координат повернута относительно начала координат на угол α . Рассмотрим переход системы координат XOY в систему координат X_2OY_2. Точка $M(x, y)$ в системе XOY перейдет в точку $M(x_2, y_2)$ в системе X_2OY_2 (рис. 7).

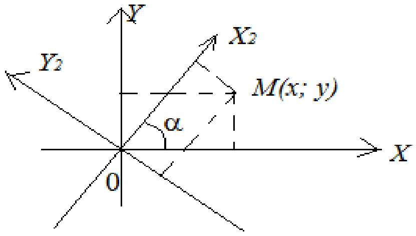

Рис. 7

Тогда формулы перехода

1) от «старых» координат в «новые» имеют вид:

$$x_2 = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ y_2 = y\cos\alpha - x\sin\alpha;$$

2) от «новых» координат к «старым»:

$$x = x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha,\ y = y_2\cos\alpha + x_2\sin\alpha.$$

Пример. Определить координаты точки $M(3, 5)$ в новой системе координат $O_1X_1Y_1$ если начало O_1 находится в точке $N(-2,1)$, а оси новой системы координат параллельны осям старой системы координат.

Решение. Используем формулы для параллельного переноса:

$$x' = 3 + 2 = 5, \quad y' = 5 - 1 = 4.$$

Ответ: точка $M(5,4)$ в новой системе координат.

Пример. Отрезок OM, где точка $M(x, y)$, повернут на угол 60^0. Найти координаты точки $M(x_2, y_2)$ в новой системе координат.

Решение. Используем формулы для поворота осей координат

$$x_2 = x\cos\alpha + y\sin\alpha = x\cos 60^0 + y\sin 60^0 = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y,$$

$$y_2 = y\cos\alpha - x\sin\alpha = y\cos 60^0 - x\sin 60^0 = \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Ответ: $M\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$ в новой системе координат.