Скалярное произведение векторов. Евклидово пространство

Пусть заданы два вектора в пространстве R_n: $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ и $\vec{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$. Скалярным произведением двух векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ называется число, вычисляемое по формуле:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n\,.$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$,
2. $\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$,
3. $\lambda\vec{x}\cdot\vec{y}=\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y})$, где λ - действительное число,
4. $\vec{x}\cdot\vec{x}>0$, если $\vec{x}\neq 0$, $\vec{x}\cdot\vec{x}=0$, если $\vec{x}=0$, $\vec{x}\cdot\vec{x}=x^2$

Линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющих свойствам 1-4, называется евклидовым пространством.

Длиной (нормой, модулем) вектора $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ в евклидовом пространстве называется корень квадратный из скалярного произведения вектора на себя:

$$|\vec{x}|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\,.$$

Свойства длины вектора:

1) $|\vec{x}|=0\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0}$;

2) $|\lambda\vec{x}|=|\lambda|\cdot|\vec{x}|$, λ - действительное число;

3) $|\vec{x}\cdot\vec{y}|\le|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$ - неравенство Коши-Буняковского;

4) $|\vec{x}+\vec{y}|\le|\vec{x}|+|\vec{y}|$ - неравенство треугольника.

Угол между векторами определяется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|},\ 0<\varphi<\pi\,.$$

Два вектора называются ортогональными**,** если их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=0,\quad \vec{x}\perp\vec{y}\,.$$

Вектор $\vec{e}$ называется единичным**,** если $|\vec{e}| = 1$.

Если единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n$ n-мерного евклидового пространства попарно ортогональны и норма каждого вектора равна 1, то векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n$ образуют ортонормированный базис.

Теорема: Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Например, в трехмерном пространстве таким базисом является система векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Упражнения

1.Определить, являются ли векторы $\vec{a}_1 = \{1;3;1;3\}$, $\vec{a}_2 = \{-3;1;-1;-1\}$, $a_3 = \{1;2;2;1\}$ линейно зависимыми.

2. В базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ заданы векторы $\vec{a}_1 = \{-1;-1;0\}$, $\vec{a}_2 = \{-1;1;-1\}$ $\vec{a}_3 = \{3;-5;6\}$. Показать, что они образуют базис и в этом базисе выразить вектор $\vec{b} = \{4;5\}$.

3. В базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ заданы векторы $\vec{a}_1 = \{3;5\}$, $\vec{a}_2 = \{1;2\}$. Показать, что они образуют базис и в этом базисе выразите вектор $\vec{b} = \{4;5\}$.

4. В базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ заданы векторы $\vec{a}_1 = \{1;2;4\}$ $\vec{a}_2 = \{1;-3;-1\}$ $\vec{a}_3 = \{1;1;5\}$. Найти вектор $\vec{b} = \{1;4;-1\}$ в этом базисе.

5. Найти длину вектора $\vec{x} = \{-10;2;-1;-3;5\}$.

6. Найти косинус угла между векторами $\vec{y} = \{0;4;12;6;-5\}$ и $\vec{x} = \{-10;2;-1;-3;5\}$.

7. При каком значении параметра n векторы $\vec{a} = \{-4;3;6;n;-5\}$ и $\vec{x} = \{n;-2;10;-31;2\}$ ортогональны.