Лекция 5

Векторы

Определение и начальные сведения о векторах

Любые две точки A, B определяют **направленный отрезок**, если точка A определяет начало, точка B – конец отрезка, направление задается от A к B.

Направленный отрезок называется **вектором**. Обозначается $\overrightarrow{AB}, \bar{a}$.

Расстояние между началом и концом вектора называется **длинной** или **модулем** вектора, обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или принадлежат параллельным прямым, при этом при совпадении направления их называют **противоположно направленные** ($\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$), если направление векторов противоположное, векторы называются **сонаправленные** ($\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$).

Векторы называются равными $\left(\bar{a} = \bar{в}\right)$, если они коллинеарные, одинаково направлены и их длинны равны: $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b},\ |\bar{a}| = |\bar{b}|$.

Векторы $\bar{a},\ -\bar{a}$ называются **противоположными**, если они коллинеарные, противоположно направлены и их длины равны:

$$\bar{a} \uparrow\downarrow (-\bar{a}),\ \ |\bar{a}| = |-\bar{a}|.$$

Три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или ей параллельны.

Линейные операции над векторами

Пусть даны два вектора $\bar{a}, \bar{b}$.

1. Сложение векторов.

Суммой двух векторов $\bar{a} + \bar{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, который идет из начала вектора $\bar{a}$ в конец вектора $\bar{b}$, если вектор $\bar{b}$ приложен к концу вектора $\bar{a}$ (рис. 1).

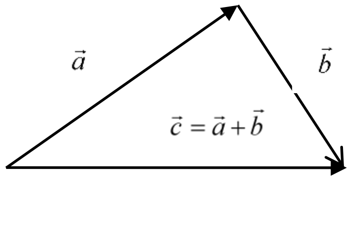

Рис. 1

Разностью векторов $\bar{a}-\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, который в сумме с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$: $\bar{a}-\bar{b}=\bar{c} \Rightarrow \bar{c}+\bar{b}=\bar{a}$ (рис. 2).

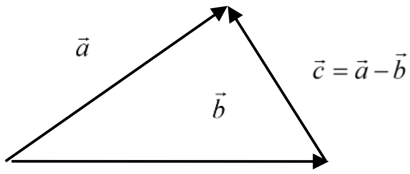

Рис. 2

При вычислении по правилу параллелограмма суммой векторов является диагональ, выходящая из общего начала этих векторов, а разностью векторов является диагональ, не имеющая общего начала с векторами $\bar{a}, \bar{b}$.

Произведением вектора $\bar{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\lambda\bar{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину равную $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$ и тоже направление, что и вектор $\bar{a}$, если $\lambda>0$, и противоположное направление, если $\lambda<0$ (рис. 3).

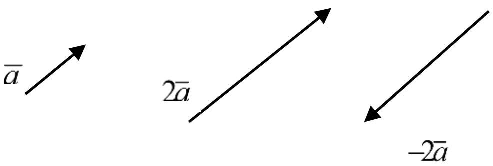

Рис. 3

Вектор, модуль которого равен нулю, называется нулевым или нуль вектором: $\bar{0}$.

Единичным вектором $\bar{a}$, или ортом, называется вектор, сонаправленный с вектором $\bar{a}$, координаты которого получены делением координат вектора $\bar{a}$ на его длину: $\bar{e}=\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$. Тогда любой вектор можно представить в стандартной форме: $\bar{a}=|\bar{a}|\bar{e}$.

Основные свойства линейных операций над векторами

1. $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ - переместительный закон;

2. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ - сочетательный закон сложения;

3. $\lambda(\mu\cdot\overline{a})=(\lambda\mu)\overline{a}$ - сочетательный закон умножения;

4. $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$ - распределительный закон относительно суммы чисел;

5. $\lambda\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$ - распределительный закон относительно суммы векторов;

6. $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$;

7. $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.

8. **Теорема о коллинеарных векторах**.

Два ненулевых вектора $\overline{a},\overline{b}$ коллинеарные тогда и только тогда, когда они пропорциональны:

$$\overline{b}=k\overline{a}.$$

9. **Теорема о компланарных векторах**.

Три ненулевых вектора $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарные тогда и только тогда, когда они принадлежат одной плоскости или один из них является линейной комбинацией двух других:

$$\overline{c}=k\overline{a}+l\overline{b},\quad k,l \text{ - числа.}$$

Пример. Пусть заданы вектора $\vec{a},\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$. Покажем, что они компланарные:

$$\overline{a}=\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})+\frac{1}{2}(\overline{a}-\overline{b})=\frac{1}{2}\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}=\overline{a},$$

т.е. вектор $\vec{a}$ является линейной комбинацией двух других векторов.

Проекция вектора на ось

Пусть задан вектор $\overline{a}$ и некоторая ось l, $\overline{a}=\overline{AB}$. Из начала и конца вектора опустим перпендикуляры на ось, точки пересечения с осью обозначим A',B' (рис. 4).

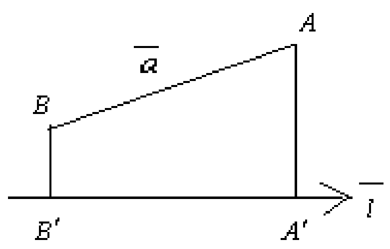

Рис. 4

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется длинна $A'B'$ направленного отрезка $A'B'$ со своим знаком: $A'B' = \pm\left|\overline{A'B'}\right|$, где знак «$\pm$» зависит от совпадения направления вектора $\overline{AB}$ и оси l или несовпадения.

Теорема. Проекция вектора $\overline{a}$ на ось l равна длине вектора $\overline{a}$ умноженной на косинус угла между вектором $\overline{a}$ и осью l:

$$np_l\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cos\varphi$$

Следствие 1: проекция вектора на ось:

1) положительная, если угол φ - острый;
2) отрицательная, если угол φ - тупой;
3) равна нулю, если угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Следствие 2: проекции равных векторов на одну и ту же ось, равны:

$$\overline{a} = \overline{b} \Rightarrow np_l\,\overline{a} = np_l\,\overline{b}\,.$$

Теорема. Проекция суммы векторов на ось равна сумме их проекций на эту ось:

$$np_l\,(\overline{a}+\overline{b}) = np_l\,\overline{a} + np_l\,\overline{b}$$

Теорема. При умножении вектора $\overline{a}$ на число λ, его проекция умножается на это же число, т.е.

$$np_l\,\lambda\overline{a} = \lambda\, np_l\,\overline{a}$$

Проекции вектора в прямоугольной системе координат

Пусть в пространстве задана система координат $XYZO$ и произвольный вектор $\overline{AB}$.

Проекции *X, Y, Z* вектора $\overline{AB}$ на оси координат называются его координатами, при этом пишут: $\overline{AB} = \{X, Y, Z\}$.

Теорема. Каковы бы ни были точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ координаты вектора $\overline{AB}$ определяются по формулам:

$$X = X_2 - X_1; \quad Y = Y_2 - Y_1; \quad Z = Z_2 - Z_1$$

Следствие 1: если $\overline{AB}$ выходит из начала координат, т.е. $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, то координаты $\overline{AB}$ равны координатам его конца;

Следствие 2: $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

Следствие 3: Если $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, то

$$\bar{a} + \bar{b} = \{x_2 + x_1; y_2 + y_1; z_2 + z_1\}$$

Следствие 4: Если $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, то $\lambda\bar{a} = \{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\}$

Следствие 5: Если $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, то $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{z_2}{z_1} = \lambda$

Направляющиеся косинусы вектора

Пусть дан произвольный вектор $\bar{a} = \{x; y; z\}$, выходящий из начала координат, не совпадающий с осями координат образующий с ними углы α, β, γ. Найдем длину вектора:

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

В силу определения проекции вектора на ось получим:

$$X = np_x\bar{a} = |\bar{a}|\cos\alpha\,,$$

$$Y = np_y\bar{a} = |\bar{a}|\cos\beta\,,$$

$$Z = np_z\bar{a} = |\bar{a}|\cos\gamma\,.$$

Выразим косинусы углов, которые называются направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,,$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,,$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,.$$

Основное свойство косинусов: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Разложение вектора по базису

Упорядоченная тройка неколлинеарных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ называется базисом и любой вектор $\bar{a}$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

$$\bar{a} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3\,,$$

где x_1, x_2, x_3 - координаты вектора $\overline{a}$ в базисе векторов ($\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$).

В прямоугольной системе координат за базис выбирают единичные вектора осей координат: $\overline{i} \uparrow\uparrow OX$, $\overline{j} \uparrow\uparrow OY$, $\overline{k} \uparrow\uparrow OZ$, $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$.

Тогда справедлива теорема.

Теорема**.** Любой вектор $\overline{a}$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\overline{a} = \alpha\overline{i} + \beta\overline{j} + \gamma\overline{k}, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ - числа.}$$

Такое представление называется разложением по базису $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, а вектор $\overline{a}$ имеет координаты (α, β, γ).

Пример. Записать разложение вектора $\overline{a} = \{1, 5, -3\}$ по базису $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Вектор будет иметь вид: $\overline{a} = \vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Ссылка: : https://vk.com/video-216917038_456240322 (1 пара)