Кривые второго порядка

1. Окружность

Множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром, на расстояние, называемое радиусом, называется окружностью.

Пусть центр окружности находится в точке O. Точка $M(x, y)$ принадлежит окружности. Тогда

$$\sqrt{(x-0)+(y-0)}=R;$$

$$x^2+y^2=R^2.$$

Если центр окружности находится в точке $O_1(a,b)$, то уравнение окружности запишется так

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Например, составить уравнение окружности, проходящей через три точки $M_1(-1;5)$, $M_2(-2;-2)$, $M_3(5;5)$.

Решение. Составим систему уравнений с тремя неизвестными: a, b – координаты центра окружности, R – радиус окружности. Заменив текущие координаты уравнения окружности координатами заданных точек, получим:

$$\begin{cases}(5-a)^2+(5-b)^2=R^2;\\(-2-a)^2+(-2-b)^2=R^2;\\(-1-a)^2+(5-b)^2=R^2.\end{cases}$$

Решив систему, получим искомое уравнение окружности:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=25.$$

2. Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим через $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ фокусы эллипса, $|F_1F_2|=2c.$ Сумму расстояний от любой точки $M(x,y)$ до точек $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ обозначим через $2a: 2a>2c$ (рис. 1).

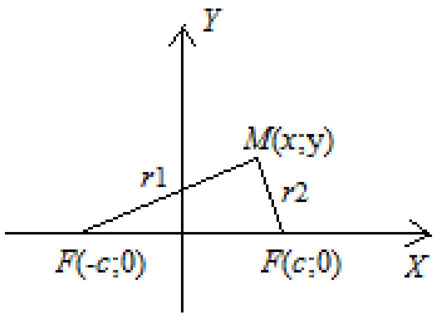

Рис. 1

Числа r_1 и r_2 называются фокальными радиусами. По определению эллипса получим уравнение:

$$r_1 + r_2 = 2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a;$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2 y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right);$$

Пусть $b^2 = a^2 - c^2; \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2;$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Полученное уравнение эллипса называется каноническим.

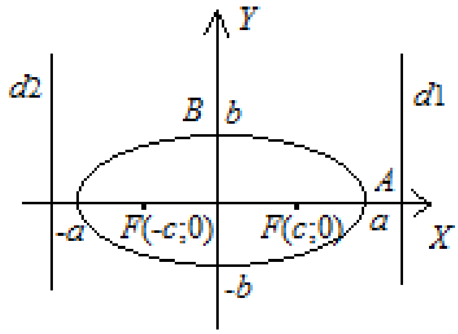

Рис. 2

Основные свойства эллипса (рис. 2):

1. эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат;
2. оси координат называются осями эллипса; начало координат называется центром эллипса;
3. точки пересечения эллипса с осями симметрии эллипса образуют вершины эллипса (точки A и B);
4. если $a \geq b$, то a называется большей полуосью эллипса, b называется малой полуосью эллипса ($2a, 2b$ – большая и малая оси эллипса);
5. если $a \geq b$, то фокусы эллипса находятся на оси OX; если $a \leq b$, то фокусы находятся на оси OY;
6. если $a = b$, то эллипс вырождается в окружность;
7. связь между полуосями и расстоянием между фокусами определяется формулой:

$$b^2 = a^2 - c^2;$$

8. эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к большей оси эллипса:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Свойства эксцентриситета:

1) так как $c < a$, то $0 \leq \varepsilon \leq 1$;

2) $\frac{a}{b} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$;

3) эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса вдоль оси, на которой находятся фокусы: при $\varepsilon \approx 1$ эллипс сильно вытянут вдоль оси, при $\varepsilon \approx 0$ эллипс похож на окружность;

9. директрисами эллипса называются прямые, перпендикулярные большей оси эллипса и проходящие на расстоянии ли $\frac{a}{\varepsilon}$ от центра эллипса (проходят за фокусами эллипса, d_1, d_2):

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon};$$

10. теорема: если r – расстояние от произвольной точки M эллипса до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от той же точки до соответствующей

этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ – есть величина постоянная, равная эксцентриситету; так как $\varepsilon < 1,$ то директрисы находятся за пределами эллипса.

Пример. Составить уравнение эллипса, если задана точка $M\left(2;-\frac{5}{3}\right)$, принадлежащая эллипсу, и его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

Решение. Подставим координаты заданной точки в уравнение эллипса:

$$\frac{4}{a^2} + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 \frac{1}{b^2} = 1$$

Используем понятие эксцентриситета: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, найдем квадрат выражения: $\left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{4}{9}$, и оценим $c^2 = \frac{4}{9}a^2$.

Подставим найденное значение в выражение $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \frac{4}{9}a^2 = \frac{5}{9}a^2$. Подставим b^2 в уравнение эллипса. Найдем значения полуосей $a = 3, b = \sqrt{5}$ и получим искомое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$

Ссылка: https://vk.com/video-216917038_456240709