Лекция 6

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\overline{a}, \overline{b}$ называется число (скаляр) равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi ,$$

или

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot np_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}| \cdot np_{\overline{b}}\overline{a}$$

Типичным примером скалярного произведения в физике является формула работы $A = F \cdot S \cos\varphi$, где F - сила, точка приложения которой перемещается на расстояние S .

Свойства скалярного произведения векторов:

1. $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$;
2. $(\lambda\overline{a})\overline{b} = \lambda(\overline{a}\overline{b})$;
3. $\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c}$;
4. $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$;
5. $\overline{a}\overline{b} = 0$, если $\overline{a} \perp \overline{b}$, и, обратно, $\overline{a} \perp \overline{b}$, если $\overline{a}\,\overline{b} = 0$.

Скалярное произведение можно находить в координатах. Справедлива теорема: если векторы $\overline{a}, \overline{b}$ заданы своими координатами: $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то их скалярное произведение определяется формулой:

$$\overline{a}\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Следствие 1: $\overline{a} \perp \overline{b}$, если $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

Следствие 2: $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\,\overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

Векторное произведение векторов

Тройка векторов называется упорядоченной, если указано, какой из них читается первым, какой второй и т.д.

Упорядоченная тройка векторов называется правой, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму совершается против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется левой (рис.1).

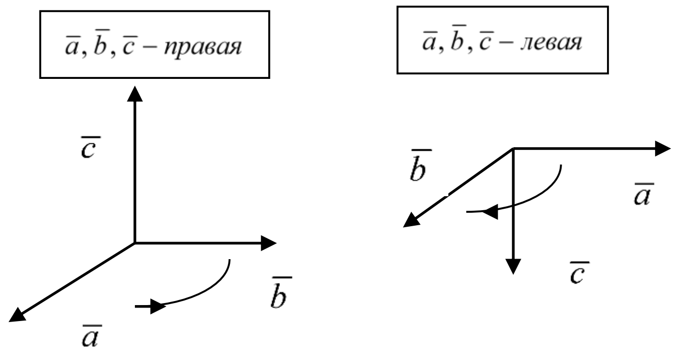

Рис. 1

Векторным произведением двух векторов $\bar a, \bar b$ называется вектор $\bar a \times \bar b$ удовлетворяющий следующим условиям:

1. длина $\bar a \times \bar b$ равна произведению модулей векторов на синус угла между ними:

$$\left|\bar a \times \bar b\right| = \left|\bar a\right| \cdot \left|\bar b\right| \sin\varphi \;;$$

2. вектор $\bar a \times \bar b$ перпендикулярен каждому из векторов $\bar a, \bar b$;
3. векторы $\bar a, \bar b$ и $\bar a \times \bar b$ образуют правую тройку векторов.

Геометрический смысл векторного произведения заключается в том, что модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

Основные свойства векторного произведения:

1. $\bar a \times \bar b = -\bar b \times \bar a$ (произведение векторов некоммутативно);
2. $\bar a \times \bar a = \bar 0$ (из определения);
3. $\left(\lambda \bar a\right) \times \bar b = \bar a \times \left(\lambda \bar b\right) = \lambda\left(\bar a \times \bar b\right)$, т.е. число можно выносить за знак векторного произведения;
4. $\left(\bar a + \bar b\right) \times \bar c = \left(\bar a \times \bar c\right) + \left(\bar b \times \bar c\right)$;
5. $\bar a \times \bar b = 0$, если $\bar a, \bar b$ - коллинеарные.

Векторное произведение можно найти в координатах, если векторы заданы в координатной форме.

Справедлива теорема: если векторы $\bar a, \bar b$ заданы своими координатами: $\bar a = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\bar b = \{x_2; y_2; z_2\}$, то векторное произведение $\bar a \times \bar b$ определяется формулой:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a}$ на векторное произведение $\bar{b}\times\bar{c}$:

$$\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})=\overline{abc}\ .$$

Свойства смешанного произведения:

1. $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}=\overline{a}(\overline{b}\times\bar{c})$;

2. если векторы компланарные, $\overline{abc}=0$;

3. $\left|\overline{abc}\right|=V$, где V - объем параллелепипеда, построенного на этих векторах;

4. $\frac{1}{6}\left|\overline{abc}\right|=V_\Delta$, где V_Δ - объем треугольной пирамиды, построенной на этих векторах.

Смешанное произведение в координатной форме можно посчитать, используя теорему: если векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ заданы своими координатами $\bar{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\bar{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$, $\bar{c}=\{x_3;y_3;z_3\}$, то

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример. Заданы четыре точки $A(5;3;2)$, $B(7;5;-1)$, $C(-2;4;1)$, $D(6;-2;-2)$. Найти: а) площадь основания $\Delta ABC;$ б) косинус угла между ребром AD и ребром основания $AC;$ в) косинус угла между ребрами AD и $DC;$ г) объем пирамиды $ABCD;$ д) высоту пирамиды $ABCD.$

Решение. а) Площадь треугольника ΔABC найдем как половину площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$*:*

$$\overrightarrow{AB}=(7-5;5-3;-1-2)=(2;2;-3),\ \overrightarrow{AC}=(-2-5;4-3;1-2)=(-7;1;-1),$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}+23\vec{j}+16\vec{k},$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=0,5\sqrt{1+23^2+16^2}=0,5\cdot\sqrt{786}\approx 14.$$

б) Угол между ребрами AD и AC найдем, используя скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AD}=(6-5;-2-3;-2-2)=(1;-5;-4),\qquad \overrightarrow{AC}=(-7;1;-1),$$

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-7\cdot 1-5\cdot 1+(-4)(-1)}{\sqrt{1+25+16}\cdot\sqrt{49+1+1}}=\frac{-8}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{51}}\approx\frac{-8}{46,282}\approx -0,173.$$

в) Косинус угла между ребрами AD и DC найдем, используя скалярное произведение векторов $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DC}$:

$$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}=(-1;5;4),\qquad \overrightarrow{DC}=(-2-6;4+2;1+2)=(-8;6;3),$$

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{DA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|}=\frac{-1\cdot(-8)+5\cdot 6+4\cdot 3}{\sqrt{1+25+16}\cdot\sqrt{64+36+9}}=\frac{50}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{109}}\approx\frac{50}{67,661}\approx 0,739.$$

г) Объем пирамиды $ABCD$; найдем, используя смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$:

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|-178\right|\approx 30.$$

д) Высоту пирамиды $ABCD$ вычислим из формулы: $V=\frac{1}{3}S_{осн}H$,

$$H=\frac{3V}{S_{осн}}=\frac{3\cdot\frac{178}{6}}{\frac{1}{2}\sqrt{786}}=\frac{178}{\sqrt{786}}\approx 6,35.$$

Ссылка: https://vk.com/video-216917038_456240380