Лекция 3

Ранг матрицы

Минором матрицы $A_{m\times n}$ называется определитель, полученный вычеркиванием *к*-строк и *к*-столбцов. Минором может быть определитель любого порядка $k \le \min(m;n)$: $M^k = \Delta_k$.

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ найти все миноры второго порядка.

$$M_1^2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7, \quad M_2^2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad M_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Рангом матрицы $A_{m\times n}$ называется наивысший порядок не равного нулю минора. Обозначается ранг $rangA$ или $r(A)$. В примере миноры второго порядка не равны нулю, то $rangA = 2$.

Свойства ранга матрицы:

1) $rangA \le \min(m;n)$;

2) $rangA = 0$, если все элементы матрицы A равны нулю;

3) если $\det(A)_{m\times m} \ne 0$, то $rangA = m$.

Методы вычисления ранга матрицы

1. Метод окаймляющих миноров.

Пусть задана матрица $A_{3\times 4}$:

а) выбирается любой элемент матрицы, неравный нулю, и около него строится определитель второго порядка;

б) если построенный определитель не равен нулю, то около него строится определитель третьего порядка;

в) если все определители третьего порядка равны нулю, и миноры большего порядка построить нельзя, то $rangA = 2$, если найдется хотя бы один определитель третьего порядка не равный нулю, то $rangA = 3$

2. Метод элементарных преобразований матриц.

Теорема: ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

Элементарные преобразования матриц:

1) отбрасывание строки, состоящей из нулей;

2) умножение элементов строки на любое число, не равное нулю;

3) изменение порядка строк;

4) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки, умноженных на любое число, не равное нулю;

5) транспонирование матрицы.

После элементарных преобразований матрицу приводят к матрице трапецеидального вида.

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ найти ранг матрицы обоим методами.

Первый метод. Найдем миноры первого, второго и третьего порядков, выстраивая их около первого члена матрицы:

$$M_1^1 = 2, \quad M_1^2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad M_1^3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -73.$$

Ответ: $rangA = 3$.

Второй метод. Приведем матрицу к трапециидальному виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & -11 & 22 & -8 \\ 0 & -7 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 22 & -8 \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{pmatrix}.$$

Протокол действий:

1) переставили первый и четвертый столбцы местами;
2) от второй строки отняли четыре первых строки ($C_2 - 4C_1$);
3) от третьей строки отняли две первых (C_3 - $2C_1$);
4) из второго столбца вычли четвертый столбец.

Теперь легко найти неравный нулю минор максимального порядка и ранг матрицы: $rangA = 3$.

Решение систем линейных уравнений

1. Общие сведения

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} - коэффициенты при неизвестных, b_i - свободные члены, x_i – неизвестные.

Если система имеет решение, то она называется совместной. Если система не имеет решения, то она называется несовместной.

Если система имеет единственной решение, то она называется определенной. Если система имеет множество решений, она называется неопределенной.

Если все свободные члены системы равны нулю, система называется однородной. Такая система всегда совместна, имеет тривиальное решение – нулевое.

Введем в рассмотрение следующие матрицы:

1) матрица коэффициентов при неизвестных

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{2m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

2) матрица неизвестных $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix},$

3) матрица свободных членов $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

Тогда система уравнений может быть записана в матричном виде:

$$A\cdot X=B.$$

Вопрос о совместности системы помогает решить теорема Кронекера-Капелли.

Теорема: Для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $rang(A)=rang(A|B)$.

Матрица $(A|B)$ называется расширенной матрицей системы.

Если ранг матрицы A равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. Если ранг матрицы A меньше числа неизвестных, то система имеет множество решений.

При условии $rang(A) < m$ уравнения системы зависимые. При условии $rang(A) = m$ уравнения системы независимые.

Пусть $rang(A) < n.$ Переменные $x_1, x_2, \dots, x_r$ называются базисными, основными, если базисный минор (определитель из коэффициентов при этих переменных) не равен нулю. Их число равно $rang(A).$ Число базисных решений меньше числа сочетаний

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \; (r < m).$$

Остальные $(n-r)$ неизвестных называются не основными (свободными). Свободным переменным в решении могут присваиваться следующие значения:

1) $C=0$ для базисных решений;
2) $C=C_i$ для общего решения;
3) C равно строкам единичной матрицы для фундаментального решения.

2. Методы решения систем линейных уравнений

1) **Метод Крамера**.

Теорема Крамера: Пусть Δ - главный определитель системы, состоящий из коэффициентов при неизвестных; Δ_j – определители, полученные из главного, заменой j –того столбца этого определителя столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое равенствами:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \; (j = 1, 2, \dots, n)$$

Формула называется формулой Крамера.

Исследование наличия решения системы:

а) если $\Delta \neq 0,$ система имеет единственное решение;
б) если $\Delta = 0,$ но хотя бы один из определителей для неизвестных не равен нулю, то система не имеет решения;
в) если $\Delta = 0$ и все определители для неизвестных равны нулю, то система имеет множество решений.

Пример. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1; \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -5. \end{cases}$$

Решение: найдем главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 26 .$$

Составим определители для неизвестных и вычислим их:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 26; \; \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 26; \; \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 26.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 1.$

2) **Метод обратных матриц**.

Систему линейных уравнений представим в матричной форме:

$$A \cdot X = B.$$

Найдем решение уравнения: $A^{-1} A \cdot X = A^{-1} B; \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot B.$

Решение системы можно записать так:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Пример. Найти решение системы уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1; \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -5. \end{cases}$$

Решение: введем матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$

Определитель матрицы A уже найден: $\det(A) = 26.$ Следовательно, обратная матрица существует.

Найдем обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 4 \\ -5 & -11 & -7 \\ -13 & -13 & -13 \end{pmatrix}.$

Вычислим матрицу X :

$$X = A \cdot B = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 4 \\ -5 & -11 & -7 \\ -13 & -13 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 56 - 10 - 20 \\ -20 + 11 + 35 \\ -52 + 13 + 65 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 26 \\ 26 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ Ответ: $x_1 = 1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 1.$

Ссылка: https://vk.com/video-216917038_456240200