Лекция 1

1. Определители

1.1Определитель второго порядка

Пусть задана таблица четырех чисел, расположенных в две строки и в два столбца

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Элементы a_{11}, a_{12} – образуют первую строку, элементы a_{21}, a_{22} образуют вторую строку. Элементы a_{11}, a_{21} образуют первый столбец, элементы a_{12}, a_{22} образуют второй столбец. Элементы a_{11}, a_{22} стоят на главной диагонали, элементы a_{12}, a_{21} стоят на побочной диагонали.

Определителем второго порядка для чисел (1) называется число, которое вычисляется по формуле

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (2)$$

Иначе это определение можно дать так: определителем второго порядка для чисел (1) называется число, равное разности произведений элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали. При этом пишут

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (3)$$

Определитель (от латинского слова determinant) обозначается Δ или $\det$.

Например, вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 20 - 18 = 2$.

1.2 Определитель третьего порядка

Пусть задана таблица, состоящая из девяти чисел, расположенных в три строки и три столбца

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Определителем третьего порядка для таблицы чисел (4) называется число, которое вычисляется по формуле

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \qquad (5)$$

при этом пишут

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}..$$

Для вычисления определителя третьего порядка можно использовать правило, называемое правилом "треугольника":

- три первых слагаемых в формуле (5) берутся со знаком плюс и мысленно строятся треугольники с основаниями параллельными главной диагонали и с вершинами в элементах на побочной диагонали (рис.1);

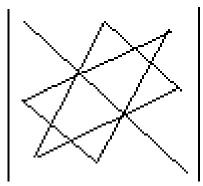

Рис. 1

- три следующих слагаемых берутся со знаком минус и мысленно строятся треугольники с основаниями параллельными побочной диагонали и с вершинами в элементах, стоящих на главной диагонали (рис.2).

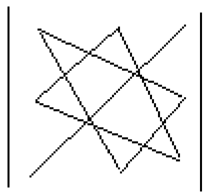

Рис.2

Например, вычислить определитель третьего порядка по правилу «треугольника» $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot(-5)\cdot(-1) + 0 - (1\cdot 2\cdot(-5) + 2\cdot 1\cdot(-1) + 0) =$$

$$= 8 + 20 - (-10 - 2) = 28 + 12 = 40.$$

1.3 Минор определителя

Пусть задан определитель третьего порядка $\Delta_3 = |a_{ij}|$, где i – индекс строки, j – индекс столбца.

Минором любого элемента a_{ij} определителя Δ_3, называется определитель меньшего порядка, который получен из элементов определителя, оставшихся после вычеркивания элементов i – строки и j – столбца. Обозначается минор M_{ij}.

Например, для определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ найти миноры M_{11}, M_{32}.

Решение: а) минор M_{11} получим, вычеркивая первую строку и первый столбец определителя:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3;$$

б) для получения минора M_{32} вычеркнем третью строку и второй столбец определителя:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6.$$

1.4 Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением любого элемента определителя a_{ij} называется минор этого элемента с определенным знаком:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \qquad (6)$$

Например, для определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ найти алгебраические дополнения A_{11}, A_{32}.

Решение:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = -3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = 6 .$$

1.5 Разложение определителя по строке или столбцу

Теорема: определитель n-ого порядка равен сумме произведений элементов выбранной строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + ... + a_{in} A_{in} \tag{7}$$

В выражении (7) записано разложение определителя по элементам i строки. Аналогичное разложение можно записать по любой строке или столбцу.

Например, записать разложение определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ по второй строке и по третьему столбцу.

Решение:

1) Вычислим определитель разложением по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4A_{21} + 5A_{22} + 6A_{23} = -4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Вычислим этот же определитель разложением по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3A_{13} + 6A_{23} + 9A_{33} = 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

1.6 Свойства определителей

1. Значение определителя не изменится, если строчки и столбцы определителя поменять местами:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Значение определителя изменится на противоположное по знаку, если две строки или два столбца определителя поменять местами:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

3. Общий множитель элементов строки или столбца определителя можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Определитель равен нулю, если он имеет строку или столбец, состоящий из нулей.
5. Определитель равен нулю, если он имеет две одинаковых строки или два одинаковых столбца.
6. Определитель равен нулю, если он имеет две пропорциональные строки или два пропорциональных столбца.
7. Значение определителя не изменится, если к элементам одной строки или столбца прибавить элементы другой строки или столбца, умноженные на какое-то число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k \cdot a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + k \cdot a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Например, вычислить определитель четвертого порядка, используя свойства определителей и разложение определителя по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -5 & 1 & -3 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}.$$

Решение: прежде чем вычислить определитель, получим в первой строчке нули, во втором и четвертом столбцах. Для этого умножим первый столбец на (-2) и сложим со вторым, второй столбец изменится, и умножим первый столбец на (-3) и сложим с четвертым, изменится четвертый столбец:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -5 & 1 & -3 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -5 & -1 & -16 \\ 3 & -6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & -16 \\ -6 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1+96-75)-(18+80-5) = -71.$$

Решим этот же пример, получив нули в третьем столбце. Для этого к третьей строке прибавим вторую, изменится третья строка, и к четвертой строке прибавим вторую строку, умноженную на (-5), изменится четвертая строка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -5 & 1 & -3 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -5 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 13 & 25 & 0 & 25 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 13 & 25 & 25 \end{vmatrix} =$$

$$= -(50-26+300)-(78-25+200) = -71..$$