Лекция 9

Плоскость в пространстве

1. Уравнение поверхности

Пусть в прямоугольной системе координат $OXYZ$ задана произвольная поверхность S и уравнение

$$F(x, y, z) = 0.$$

Это уравнение называется уравнением **поверхности** в заданной системе координат, если ему удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей поверхности, и не удовлетворяют координаты любой другой точки, не принадлежащей поверхности.

Степень уравнения определяет **порядок** поверхности. Поверхность первого порядка называется **плоскостью**.

2. Общее уравнение плоскости

Пусть в прямоугольной системе координат $OXYZ$ задана произвольная плоскость π, точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \pi$ и вектор $\vec{N} \perp \pi$ $\vec{N} = (A, B, C)$. Рассмотрим произвольную точку $M(x; y; z) \in \pi$ (рис.1).

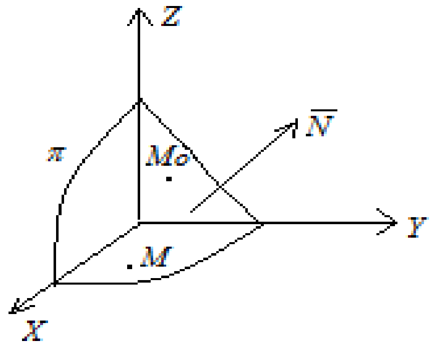

Рис. 1

Построим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$. Он принадлежит плоскости π, следовательно, перпендикулярен вектору $\vec{N}$, и скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{N} = 0,$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Мы получили уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A, B, C\}$, который называется **вектором нормали** или **нормальным вектором**.

Если раскрыть скобки и привести подобные члены, то получим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;4;5)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{1,\ 2,\ -3\}$.

Решение. Подставим координаты вектора в уравнение плоскости:

$$1(x-2) + 2(y-4) - 3(z-5) = 0,$$

$$x + 2y - 3z + 7 = 0.$$

Пример. Для плоскости $3x - 2y + 36z + 4 = 0$ определить координаты нормального вектора.

Решение. Определим координаты нормального вектора плоскости, это вектор $\vec{N} = \{3,\ -2,\ 36\}$.

3. Нормальное уравнение плоскости

Нормальное уравнение плоскости записывается так:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

В уравнении вектор нормали $\vec{N} = \{A, B, C\}$ образует с осями координат углы $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, параметр p – это расстояние от плоскости до точки начала координат O ($p = OM$, рис.2).

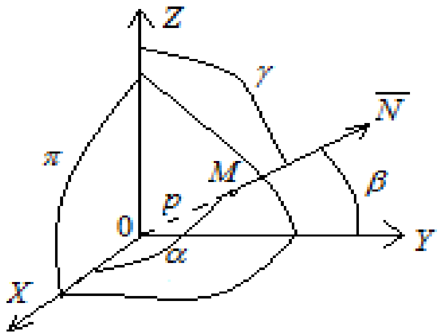

Рис. 2

Если ввести единичный вектор нормали, то нормальное уравнение плоскости можно записать в виде:

$$\mu(Ax + By + Cz + D) = 0,$$

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Знак нормирующего множителя определяется так:

а) если $D < 0$, то μ – множитель положительный;

б) если $D > 0$, то μ – множитель отрицательный.

4. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть задано нормальное уравнение плоскости. Представим уравнение иначе:

$$\frac{x\cos\alpha}{p} + \frac{y\cos\beta}{p} + \frac{z\cos\gamma}{p} = 1,$$

$$a = \frac{p}{\cos\alpha}; \quad b = \frac{p}{\cos\beta}; \quad c = \frac{p}{\cos\gamma},$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

параметры a, b, c – это отрезки, которые плоскость отсекает на осях координат (рис. 3).

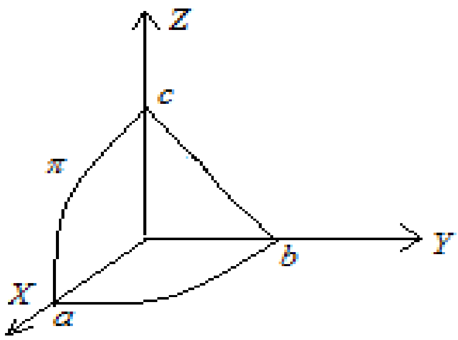

Рис.3

5. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость задана уравнением общего вида: $Ax + By + Cz + D = 0.$

Точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \notin \pi.$ Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не принадлежащей плоскости (рис.4), до самой плоскости можно найти, используя нормальное уравнение плоскости. Пусть точка $M(x, y, z)$ – проекция точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскость π. Точки A, B – проекции точек M, M_0 на вектор $\overrightarrow{N}$:

$$OB = p, OA = p_0, \quad d = |OA - OB| = |p_0 - p|,$$

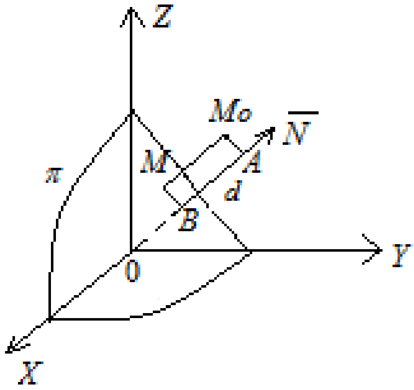

Рис. 4

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma \right|$$

или

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

6. Угол между плоскостями

Пусть заданы две плоскости π_1 и π_2:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Для каждой плоскости найдем нормальный вектор:

$$\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\},\ \vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

Угол φ между плоскостями (рис.5) можно найти как угол между векторами $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$:

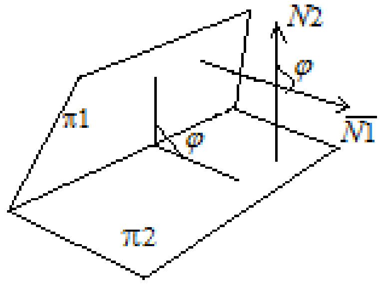

Рис. 5

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}.$$

Пример. Определить угол между плоскостями:

$$x - z = 0,\ y - z = 0.$$

Решение. Для каждой плоскости найдем нормальный вектор:

$$\vec{N}_1 = \{1, 0, -1\},\ \vec{N}_2 = \{0, 1, -1\}.$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|}. = \frac{0+0+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60°.$$

7. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости π_1 и π_2:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Для каждой плоскости найдем нормальный вектор:

$$\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

1. Условие перпендикулярности плоскостей; $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$, т. е. скалярное произведение векторов равно нулю:

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

2. Условие параллельности плоскостей; $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$, т. е. соответствующие координаты векторов пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

8. Неполные уравнения плоскости

Пусть задано уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0.$

Если один из коэффициентов уравнения равен нулю, получим неполное уравнение плоскости:

1) $D = 0,\ Ax + By + Cz = 0$ - плоскость, проходящая через начало координат;
2) $A = 0,\ By + Cz + D = 0$ – плоскость параллельна оси OX;
3) $B = 0,\ Ax + Cz + D = 0$ – плоскость параллельна оси OY;
4) $C = 0,\ Ax + By + D = 0$ – плоскость параллельна оси OZ;
5) $A = 0,\ B = 0,\ Cz + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости OXY;
6) $C = 0,\ B = 0,\ Ax + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости OYZ;
7) $A = 0,\ C = 0,\ By + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости OXZ;
8) $A = 0,\ B = 0,\ D = 0,\ Cz = 0$ – плоскость OXY;
9) $A = 0,\ C = 0,\ D = 0,\ By = 0$ – плоскость OXZ;
10) $C = 0,\ B = 0,\ D = 0,\ Ax = 0$ – плоскость OYZ.

Ссылка: https://vk.com/video-216917038_456240554 (1 пара)