

## Решения.

### 1 курс

**Задача 1.** Элементы матрицы  $A_n$  заданы формулой:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 1 \text{ или } j = 1; \\ a_{i-1j} + a_{ij-1}, & \text{если } i \neq 1 \text{ и } j \neq 1, \end{cases}$$

где  $i$  и  $j$  принимают значения от 1 до  $n$ . Найдите определитель матрицы  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Решение:**  $\det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a_{2n-1} + 1 \\ 1 & 3 & 6 & \cdots & a_{3n-1} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 + a_{n-12} & a_{n2} + a_{n-13} & \cdots & a_{nn-1} + a_{n-1n} \end{vmatrix}$

Заметим, что если из  $k$ -ой строки вычтем  $(k-1)$ -ю (для  $k > 1$ ), то, т.к.

$$a'_{kj} = a_{kj} - a_{k-1j} = (a_{k-1j} - a_{kj-1}) - a_{k-1j} = a_{kj-1}$$

то получим, что исходная строка как бы сместится вправо на один элемент а значит если мы из  $n$ -ой строки вычтем  $(n-1)$ -ю, из  $(n-1)$ -ой вычтем  $(n-2)$ -ю и т.д. до вычитания из 2-ой 1-ой, то получим в первом столбце нули, начиная со второй строки, а остальные элементы сдвинутся вправо на один столбец:

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & a_{2n-2} + 1 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & a_{3n-2} + a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 + a_{n-12} & \cdots & a_{nn-2} + a_{n-1n-1} \end{vmatrix}.$$

Продела ту же операцию ещё раз (т.е. из  $k$ -ой строки вычтем  $(k-1)$ -ю при  $k > 2$ ), получим

$$a''_{kj} = a'_{kj} - a'_{k-1j} = a_{kj-1} - a_{k-1j-1} = (a_{k-1j-1} - a_{kj-2}) - a_{k-1j-1} = a_{kj-2}.$$

Таким образом  $k$ -ая строка сместилась ещё на один элемент вправо:

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & a_{2n-2} + 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3n-3} + a_{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{nn-3} + a_{n-1n-2} \end{vmatrix}.$$

Пошагово проделывая эти вычитания из каждой  $k$ -ой строки  $(k-1)$ -й для  $k > 3$ , затем для  $k > 4$  и т.д. до  $k > n-1$  получим треугольный вид матрицы  $A_n$  с единицами на главной диагонали:

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & a_{2n-2} + 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3n-3} + a_{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

**Ответ:** 1.

**Задача 2.** Уравнение окружности, описанной около треугольника  $\triangle ABC$ , имеет вид  $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$ . Точка  $M(6, -10)$  лежит на продолжении стороны  $BC$ . Найти координаты вершин  $B$  и  $C$ , если координаты вершины  $A(-1; 1)$  и угол  $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$ .

**Решение:**  $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$ , т.е. окружность имеет центр  $O(2; -3)$  и радиус 5.

Заметим, что т.к. угол  $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$ , то  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$  (вписанный и центральный угол). Значит  $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{OB}$ .

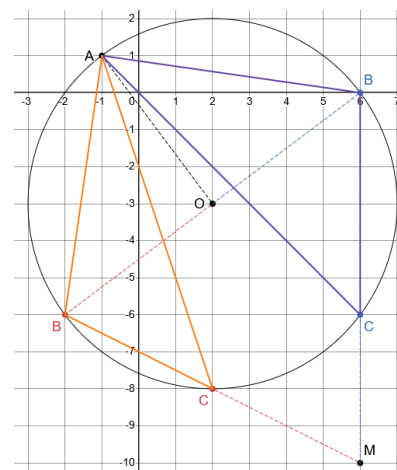
$$\overrightarrow{AO} = \{2 - (-1); -3 - 1\} = \{3; -4\} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \{4; 3\} \text{ или } \overrightarrow{OB} = \{-4; -3\},$$

откуда точка  $B$  может иметь координаты  $B_1(6; 0)$  или  $B_2(-2; -6)$ . Для отыскания координат точки  $C$  осталось найти пересечение прямой  $BM$  с окружностью:

$$B_1M: \frac{x - 6}{6 - 6} = \frac{y}{-10} \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 6; \\ (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2; \end{cases} \Rightarrow C_1(6; -6);$$

$$B_2M: \frac{x + 2}{6 + 2} = \frac{y + 6}{-10 + 6} \Rightarrow x + 2y + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - 10 = 0; \\ (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2; \end{cases} \Rightarrow C_2(2; -8);$$

**Ответ:**  $B(6; 0)$  и  $C(6; -6)$  или  $B(-2; -6)$  и  $C(2; -8)$ .



**Задача 3.** Точки  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  – центры квадратов, построенных на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $\Delta ABC$  соответственно. Координаты вершин треугольника:  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(3; 4; 2)$ ,  $C(5; 0; 7)$ . Квадраты лежат в плоскости этого треугольника, снаружи треугольника.

а) Найдите координаты  $O_2$  (центр квадрата, построенного на стороне  $BC$ ).

б) Докажите, что  $O_2A \perp O_1O_3$ .

в) Найдите площадь  $\Delta O_1O_2O_3$ .

**Решение:** а)  $\overrightarrow{AB} = \{2; 2; -1\}$ ,  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$ ;  $\overrightarrow{AC} = \{4; -2; 4\}$ ,  $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$ .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 - 4 - 4 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \Delta ABC$  – прямоугольный.

Заметим, что  $\overrightarrow{AO_1} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \left\{0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$ , откуда  $O_1\left(1, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

Аналогично  $\overrightarrow{AO_3} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \{0, -3, 3\}$ , откуда  $O_3(1, -1, 6)$ .

Пусть  $BCC_1B_1$  – квадрат, построенный на гипотенузе.

$\overrightarrow{BC} = \{2; -4; 5\}$ ,  $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4 + 16 + 25} = 3\sqrt{5}$ ;

Уравнение плоскости  $ABC$  имеет вид  $\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$  или  $x - 2y - 2z + 9 = 0$ , откуда

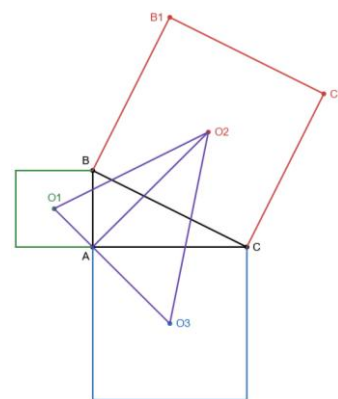
$\vec{n} = \{1, -2, -2\}$  вектор, перпендикулярный плоскости  $ABC$ .

$\overrightarrow{BC} \times \vec{n} = \left\{ \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right\} = \{18, 9, 0\}$ ,  $|\overrightarrow{BC} \times \vec{n}| = \sqrt{324 + 81} = 9\sqrt{5}$  значит

$\overrightarrow{BO_2} = \{6, 3, 0\}$  или  $\overrightarrow{BO_2} = \{-6, -3, 0\}$ .

$\overrightarrow{BO_2} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BB_1} = \left\{4, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ , откуда  $O_2\left(7, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$  или  $\overrightarrow{BO_2} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BB_1} = \left\{-2, -\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ ,

откуда  $O_2'\left(1, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$ .



Так как точки  $A$  и  $O_2$  должны лежать по разные стороны прямой  $BC$ , то из двух возможных координат точки  $O_2$  выбираем ту, для которой  $AO_2$  больше:

$$AO_2 = \sqrt{(7-1)^2 + \left(\frac{7}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{9}{2}-3\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{9\sqrt{2}}{2};$$

$$AO_2' = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{9}{2}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

Окончательно имеем:  $O_1\left(1, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ,  $O_2\left(7, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ ,  $O_3(1, -1, 6)$ .

$$\text{б) } \overrightarrow{AO_2} = \left\{6, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}, \overrightarrow{O_1O_3} = \left\{0, -\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right\}, \overrightarrow{AO_2} \times \overrightarrow{O_1O_3} = 6 \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AO_2} \perp \overrightarrow{O_1O_3}.$$

$$\text{в) } S_{O_1O_2O_3} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AO_2}| \cdot |\overrightarrow{O_1O_3}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{81}{4}.$$

**Ответ:** а)  $O_2\left(7, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ ; в)  $\frac{81}{4}$ .

**Задача 4.** Вычислить

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x + 2\sqrt{x + 3\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right);$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \left[ \frac{5-3x}{x} \right] \sin 4x \right), \text{ где } [x] - \text{целая часть числа } x$$

**Решение:** а)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x + 2\sqrt{x + 3\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2\sqrt{x + 3\sqrt{x}}}{\sqrt{x + 2\sqrt{x + 3\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2\sqrt{1 + \frac{3\sqrt{x}}{x}}}{\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{x + 3\sqrt{x}}}{x}} + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2\sqrt{1 + \frac{3}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x\sqrt{x}}}} + 1} \right) = \frac{2\sqrt{1+3 \cdot 0}}{\sqrt{1+2\sqrt{0+3 \cdot 0}} + 1} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

б) так как  $\left[ \frac{5-3x}{x} \right] = \left[ \frac{5}{x} - 3 \right]$  то  $\frac{5}{x} - 4 < \left[ \frac{5-3x}{x} \right] \leq \frac{5}{x} - 3$ , откуда:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{5}{x} - 4 \right) \sin 4x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{5-3x}{x} \right] \sin 4x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{5}{x} - 3 \right) \sin 4x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{5}{x} - 4 \right) 4x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{5-3x}{x} \right] \sin 4x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{5}{x} - 3 \right) 4x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (20 - 16x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{5-3x}{x} \right] \sin 4x \leq \lim_{x \rightarrow 0} (20 - 12x);$$

$$20 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{5-3x}{x} \right] \sin 4x \leq 20;$$

**Ответ:** а) 1; б) 20.

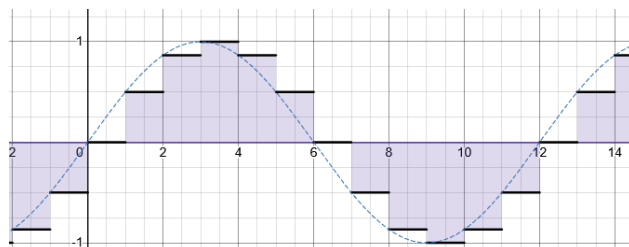
**Задача 5.** Вычислить

$$\int_0^{2026} \sin\left(\frac{[x]\pi}{6}\right) dx,$$

где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ .

**Решение:**

Геометрический смысл определённого интеграла – площадь под графиком. Так как функция  $[x]$  – «ступенчатая», то и график  $\sin\left(\frac{[x]\pi}{6}\right)$  тоже ступенчатый. Так как  $\sin(x)$  имеет период  $2\pi$ , то  $\sin\left(\frac{[x]\pi}{6}\right)$  имеет период 12, а значит  $\int_0^{12} \sin\left(\frac{[x]\pi}{6}\right) dx = 0$  и даже



$\int_0^{12k} \sin\left(\frac{[x]\pi}{6}\right) dx$ . Так как  $2026 = 2016 + 10 = 12 \cdot 168 + 10$ , то

$$\int_0^{2026} \sin\left(\frac{[x]\pi}{6}\right) dx = \int_0^{10} \sin\left(\frac{[x]\pi}{6}\right) dx = \sum_{m=0}^9 \sin\left(\frac{m\pi}{6}\right).$$

С учётом  $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ , получим  $\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)$ ,

$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ , и значит

$$\sum_{m=0}^9 \sin\left(\frac{m\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{0 \cdot \pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

**Ответ:**  $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ .

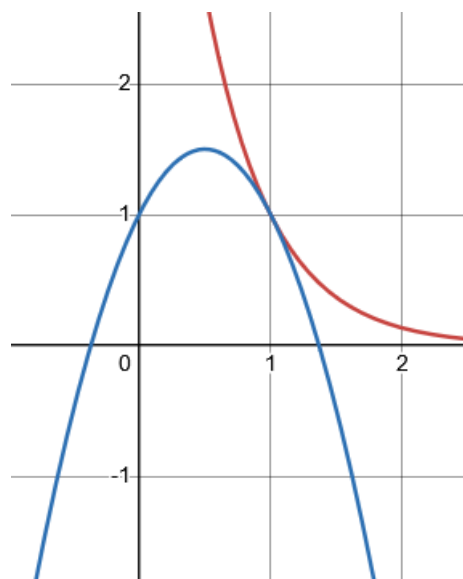
**Задача 6.** При каком значении параметра  $a$  уравнение  $e^{2-2x} = a + 2x - 2x^2$  имеет единственный корень? Найти этот корень.

**Решение:** Рассмотрим графики функций  $y_1 = e^{2-2x}$  и  $y_2 = a + 2x - 2x^2$ . Заметим, что график  $y_1$  имеет выпуклость вниз, а  $y_2$  вверх, значит, если нам необходима единственная точка пересечения этих графиков, то в этой точке графики будут иметь общую касательную. Имеем

$$\begin{cases} y_{1\text{кас}} = -2e^{2-2x_0}(x - x_0) + e^{2-2x_0}; \\ y_{2\text{кас}} = (2 - 4x_0)(x - x_0) + a + 2x_0 - 2x_0^2, \end{cases}$$

откуда  $\begin{cases} e^{2-2x_0} = 2x_0 - 1; \\ e^{2-2x_0} = a + 2x_0 - 2x_0^2. \end{cases}$  Так как функция  $e^{2-2x}$

возрастает, а  $2x - 1$  убывает, то графики этих функций могут иметь единственное пересечение, откуда  $x_0 = 1$ . Подставляя во второе уравнение системы, получаем  $a = e^{2-2x_0} - 2x_0 + 2x_0^2 = 1 - 2 + 2 = 1$ .



**Ответ:**  $x_0 = 1, a = 1$ .

## Решения.

### 2 курс

**Задача 1.** Изобразить множество точек  $z$  комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

$$\frac{1}{8} \leq \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\bar{z} + i} \right) + \operatorname{Im} \left( \frac{1}{z - i} \right) \leq \frac{1}{4}.$$

**Решение:**

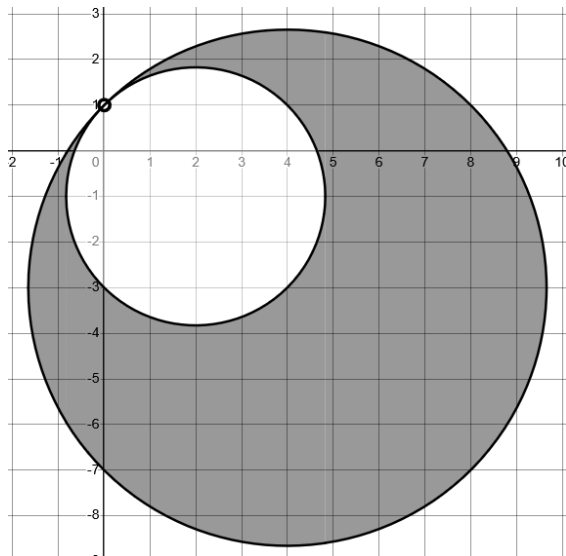
$$\frac{1}{\bar{z} + i} = \frac{1}{x - iy + i} = \frac{x + (y - 1)i}{x^2 + (y - 1)^2};$$

$$\frac{1}{z - i} = \frac{1}{x + iy - i} = \frac{x - (y - 1)i}{x^2 + (y - 1)^2};$$

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1}{\bar{z} + i} \right) + \operatorname{Im} \left( \frac{1}{z - i} \right) = \frac{x - (y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2}.$$

Пусть  $x^2 + (y - 1)^2 \neq 0$  (или  $z \neq i$ ), тогда двойное неравенство превращается в систему:

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 \leq 8(x - (y - 1)); \\ x^2 + (y - 1)^2 \geq 4(x - (y - 1)); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 4)^2 + (y + 3)^2 \leq 32; \\ (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \geq 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z - 4 + 3i| \leq 32; \\ |z - 2 + i| \geq 8; \end{cases}$$



Таким образом требуемая область, это внутренность окружности  $|z - 4 + 3i| = 32$ , без внутренности окружности  $|z - 2 + i| = 8$  и кроме точки  $z = i$ .

**Задача 2.** Вычислить

а)  $\int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x + \sin 3x};$

б)  $\int e^{2026x} (2026 + 2 \sin 2x - 2026 \cos 2x) dx.$

**Решение: а)**

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x + \sin 3x} &= \int \frac{dx}{\sin 2x + (\sin x + \sin 3x)} = \int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin 2x \cos x} = \\ &= \int \frac{dx}{2 \sin x \cos x (1 + 2 \cos x)} = \int \frac{\sin x dx}{2(1 - \cos^2 x) \cos x (1 + 2 \cos x)} = \\ &= \left[ \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t^2 - 1)t(1 + 2t)} = \dots \end{aligned}$$

Разобьём на элементарные дроби:

$$\frac{1}{(t^2 - 1)t(1 + 2t)} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t + 1} + \frac{C}{t} + \frac{D}{2t + 1};$$

откуда:

$$1 = At(t+1)(2t+1) + Bt(t-1)(2t+1) + C(t^2-1)(2t+1) + Dt(t^2-1).$$

$$t = 1 \Rightarrow 1 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{6};$$

$$t = -1 \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2};$$

$$t = 0 \Rightarrow 1 = -C \Rightarrow C = -1;$$

$$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 = \frac{3}{8}D \Rightarrow D = \frac{8}{3};$$

Возвращаясь к интегралу, имеем:

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{1}{2} \int \left( -\frac{1}{t} + \frac{1}{6(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} + \frac{8}{3(2t+1)} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left( -\ln|\cos x| + \frac{1}{6} \ln(\cos x - 1) - \frac{1}{2} \ln(\cos x + 1) + \frac{4}{3} \ln(2 \cos x + 1) \right) + c = \\ &= -\frac{6}{12} \ln|\cos x| + \frac{1}{12} \ln(\cos x - 1) - \frac{3}{12} \ln(\cos x + 1) + \frac{8}{12} \ln(2 \cos x + 1) + c = \\ &= \frac{1}{12} \ln \left| \frac{(\cos x - 1)(2 \cos x + 1)^8}{\cos^6 x (\cos x + 1)^3} \right| + c. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int e^{2026x} (2026 + 2 \sin 2x - 2026 \cos 2x) dx &= \int 2e^{2026x} (2 \sin x \cos x + 2026 \sin^2 x) dx = \\ &= 2e^{2026x} \sin^2 x + c. \end{aligned}$$

**Ответ:** а)  $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{(\cos x - 1)(2 \cos x + 1)^8}{\cos^6 x (\cos x + 1)^3} \right| + c$ ; б)  $2e^{2026x} \sin^2 x + c$ .

**Задача 3.** Точки  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  – центры квадратов, построенных на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $\triangle ABC$  соответственно. Координаты вершин треугольника:  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(3; 4; 2)$ ,  $C(5; 0; 7)$ . Квадраты лежат в плоскости этого треугольника, снаружи треугольника.

а) Найдите координаты  $O_2$  (центр квадрата, построенного на стороне  $BC$ ).

б) Докажите, что  $O_2A \perp O_1O_3$ .

в) Найдите площадь  $\triangle O_1O_2O_3$ .

**Решение:** см. задачу 3 первого курса.

**Задача 4.** Найти функцию  $f(x)$ , если известно, что для всех  $x > 0$  выполняется

$$f' \left( \frac{1}{x} \right) = f(x).$$

**Решение:**

$$f' \left( \frac{1}{x} \right) = f(x) \Rightarrow f'(x) = f \left( \frac{1}{x} \right) \Rightarrow f''(x) = f' \left( \frac{1}{x} \right) \left( -\frac{1}{x^2} \right) \Rightarrow f''(x) = -\frac{f(x)}{x^2}.$$

Имеем дифференциальное уравнение  $x^2 y'' + y = 0$ . Будем искать решение в виде  $y = x^\lambda$ . Имеем:

$$x^2\lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} + x^\lambda = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - \lambda + 1)x^\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом  $y = c_1 x^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} + c_2 x^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{x} \left( c_1 (e^{\ln x})^{\frac{i\sqrt{3}}{2}} + c_2 (e^{\ln x})^{-\frac{i\sqrt{3}}{2}} \right)$ . Применив формулу

Эйлера и переобозначив константы, получим  $y = \sqrt{x} \left( c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right)$ .

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left( c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right) + \sqrt{x} \left( -c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \frac{\sqrt{3}}{2x} + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \frac{\sqrt{3}}{2x} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left( c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} \left( c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) - c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \frac{c_1 + \sqrt{3}c_2}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \frac{c_2 - \sqrt{3}c_1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right). \end{aligned}$$

Тогда, с учётом  $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$  получим:

$$f' \left( \frac{1}{x} \right) = \sqrt{x} \left( \frac{c_1 + \sqrt{3}c_2}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) - \frac{c_2 - \sqrt{3}c_1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right).$$

Т. к. по условию  $f' \left( \frac{1}{x} \right) = f(x)$ , то должно выполняться:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{c_1 + \sqrt{3}c_2}{2}; \\ c_2 = -\frac{c_2 - \sqrt{3}c_1}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \sqrt{3}c_2; \\ 3c_2 = \sqrt{3}c_1; \end{cases} \Rightarrow c_1 = \sqrt{3}c_2.$$

**Ответ:**  $y = c\sqrt{x} \left( \sqrt{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right) = c\sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)$ .

**Задача 5.** Вычислить

$$\int_0^{2026} \sin\left(\frac{[x]\pi}{6}\right) dx,$$

где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ .

**Решение:** см. задачу 5 первого курса.

**Задача 6.** Дана последовательность функций  $\{f_n(x)\}$  такая, что

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} \text{ и } f_n(x) = \frac{f_{n-1}(x)}{1+x^{2^{n-1}}}, \text{ при } n > 1.$$

Найти

$$\sum_{k=1}^{2025} f_k^{(2025)}(0).$$

**Решение:**

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{f_{n-1}(x)}{1+x^{2^{n-1}}} = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdot \dots \cdot (1+x^{2^{n-1}})} = \frac{1-x}{1-x^{2^n}} = \\ &= (1-x) \left( 1 + x^{2^n} + (x^{2^n})^2 + (x^{2^n})^3 + \dots \right) = \end{aligned}$$

$$= 1 - x + x^{2^n} - x^{2^{n+1}} + x^{2 \cdot 2^n} - x^{2 \cdot 2^{n+1}} + x^{3 \cdot 2^n} - x^{3 \cdot 2^{n+1}} + \dots$$

Таким образом мы получили разложение функции  $f_n(x)$  в ряд Маклорена. Значит  $f_k^{(2025)}(0)$  может принимать значение либо  $-2025!$  либо  $0$ , в зависимости от того, найдётся ли такое целое число  $m$ , что  $2025 = m \cdot 2^k + 1$ . Заметим, что  $2025 = 253 \cdot 2^3 + 1$ , а значит только  $f_1^{(2025)}(0)$ ,  $f_2^{(2025)}(0)$  и  $f_3^{(2025)}(0)$  отличны от нуля.

**Ответ:**  $\sum_{k=1}^{2025} f_k^{(2025)}(0) = -3 \cdot 2025!$

