Лекция

Собственные векторы и собственные значения

Вектор $\overline{x} \neq 0$ называется **собственным** вектором линейного оператора $\tilde{A}$, если найдется такое число λ, что

$$\tilde{A}(\overline{x}) = \lambda \overline{x}$$

Число λ называется **собственным значением** оператора $\tilde{A}$, соответствующим вектору $\overline{x}$.

$$\tilde{A}(\overline{x}) = AX = \lambda X$$

Вектор $\overline{x}$ переводится в ему коллинеарный вектор.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Или

$$(A - \lambda E)X = 0$$

Система (4) имеет нулевое решение. Для того, чтобы она имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Определитель матрицы $(A - \lambda E)$ называется **характеристическим многочленом** оператора $\tilde{A}$ или матрицы A, а само уравнение (6) называется **характеристическим уравнением $\tilde{A}$ или A.**

Пример 1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$ (матрицы A)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -6 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - 6(3-\lambda) = 0$$

$$(3-\lambda)\left(2-3\lambda+\lambda^2-6\right) = 0$$

$$\lambda = 3,\ \lambda = 4,\ \lambda = -1$$

Находим собственные векторы:

1) $\lambda = 3$

$$(A-3E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0;\ A-3E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 0\cdot x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_1 + 0\cdot x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 0\cdot x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = C_1 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \quad (0; C_1; 0)$$

2) $\lambda = 4$

$$(A-4E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0;\ A-4E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 0\cdot x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_1 - 1\cdot x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 0\cdot x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = -3C_2 \\ x_2 = -5C_2 \\ x_3 = C_2 \end{matrix} \quad (-3C_2; -5C_2; C_2)$$

3) $\lambda = -1$

$$(A+E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0;\ A+E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 0\cdot x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 0\cdot x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = 2C_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = C_3 \end{matrix} \quad \left(2C_3;0;C_3\right)$$

Ответ: вектора $\left(0;C_1;0\right)$; $\left(-3C_2;-5C_2;C_2\right)$; $\left(2C_3;0;C_3\right)$ при $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0, C_3 \neq 0$ являются собственными векторами. Числа $\lambda = 3,\ \lambda = 4,\ \lambda = -1$ - собственные значения.

Пусть оператор $\tilde{A}$ (матрица A) имеет n линейно независимых собственных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Векторы $\vec{e}_i$ - примем за базисные. Тогда $\tilde{A}\left(\vec{e}_i\right) = \lambda_i \vec{e}_i = a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + ... + a_{ni}\vec{e}_n$, следовательно $a_{ij} = 0$, если $i \neq j$ и $a_{ii} = \lambda_i$, если $i = j$.

Следовательно, матрица оператора $\tilde{A}$ в базисе из собственных векторов имеет **диагональный** вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Верно и обратное:
если A линейного оператора $\tilde{A}$ имеет диагональный вид в некотором базисе, то все векторы этого базиса являются собственными векторами $\tilde{A}$.

Пример 2. Нормировать собственные векторы из предыдущего примера.

Решение. Подберем C_i так, чтобы длина вектора равнялась единице.

$$\overline{a_1} = \left(0;C_1;0\right) \qquad \overline{e_1} = \left(0;1;0\right)$$

$$\overline{a_2} = \left(-3C_2;-5C_2;C_2\right) \quad \left(9+25+1\right)C_2^2 = 1 \quad C_2 = \sqrt{\frac{1}{35}} \quad \overline{e_2} = \left(-\frac{3}{\sqrt{35}};-\frac{5}{\sqrt{35}};\frac{1}{\sqrt{35}}\right)$$

$$\overline{a_3} = \left(2C_3;0;C_3\right) \quad \left(4+1\right)C_3^2 = 1 \quad C_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \vec{e}_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}};0;\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$